

---

АДЫГЕЙСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
(национальный  
исследовательский  
университет)

# графы, игры и модели

---

КАВКАЗСКИЙ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ЦЕНТР АГУ

---

Майкоп  
12–15 октября  
2022



АДЫГЕЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ )

# Графы, игры и модели

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ  
КОНФЕРЕНЦИИ

Майкоп  
12-15 октября 2022

УДК 51(063)

ББК 22.1лО

Г 78

**Графы, игры и модели** : материалы Международной научной конференции / редакционная коллегия: А. М. Райгородский, А. В. Савватеев, Д. К. Мамий [и др.]. – Майкоп : АГУ, 2022. – 86 с.

**ISBN 978-5-85108-422-5**

**Компьютерный макет**

Воронов В. А.

**Редакционная коллегия**

Райгородский А. М., Савватеев А. В., Мамий Д. К., Сташ А. Х., Воронов В. А.

Настоящее издание включает материалы Международной научной конференции «Графы, игры и модели». Конференция проходила с 12 по 15 октября 2022 года в г. Майкопе в Адыгейском государственном университете. К участию в конференции были приглашены отечественные и зарубежные ученые, аспиранты, магистранты и студенты. Тезисы докладов публикуются в том виде, в каком они были представлены авторами.

© Адыгейский государственный университет, 2022.

# Содержание

<b>Пленарные доклады</b>	<b>5</b>
Noga Alon. Universal graphs and adjacency labeling . . . . .	5
A. В. Kupavskii. Spread approximations for forbidden intersection problems . . . . .	5
A. В. Леонидов. Динамика цен на акции: свойства и механизмы . . . . .	5
<b>Теория игр и приложения</b>	<b>6</b>
A. Ю. Филатов. Стратегические фирмы и ценополучатели в количественной олигополии без сговора: теоретико-игровые модели, равновесия, каскадные эффекты . . . . .	6
A. Л. Гриних, Л. А. Петросян. Характеристические функции для дилеммы заключённого и лиц на сети . . . . .	8
В. В. Гусев. Множественно-весовые игры . . . . .	11
A. М. Коваленко, A. В. Леонидов. Игра Изинга с одновременным участием многих агентов . . . . .	15
Н. С. Калинин, A. Д. Кузьмина. Моделирование и анализ централизованного распределения абитуриентов по образовательным программам в России . . . . .	18
И. А. Самойленко. Betweenness centrality in network formation game . . . . .	21
A. П. Антонов, A. В. Леонидов, A. Г. Семенов. Самовозбуждающаяся игра с бинарным выбором . . . . .	24
E. E. Васильева, A. В. Леонидов, A. С. Титов. Обучение с подкреплением агентов повторяющихся социальных дилемм . . . . .	28
E. E. Васильева, A. В. Леонидов. Стратегическое охлаждение / связывание в бинарной игре Изинга на полном графе . . . . .	31
<b>Теория графов и дискретная геометрия</b>	<b>35</b>
Д. Д. Черкашин. О минимальной сумме весов ребер в знаковом реберно-доминированном графе . . . . .	35
Dhruv Bhasin. On ergodicity of a 1–dimensional PCA with parity-dependent updation rules . . . . .	38
Igor Batmanov. A special case of the Borsuk problem for vertices of a 10-dimensional hypercube . . . . .	38
A. И. Бикеев. Проблема Борсука и радиус описанной гиперсферы . . . . .	39
И. М. Бучинский. Бесконечные системы уравнений над графами . . . . .	40
И. А. Федотов. Особенности алгоритмической и архитектурной оптимизации алгоритмов сопоставления графов на примере задачи изоморфного вхождения подграфа . . . . .	42
A. В. Ильев. О совместности систем уравнений над различными классами конечных матриц . . . . .	46
M. M. Кошелев. Модулярность псевдослучайных графов . . . . .	49
Н. А. Кузьмин. О $(n, n + 3)$ -графах максимальной степени 3 с наибольшим количеством паросочетаний . . . . .	51
A. А. Лобов, M. Б. Абросимов. О единственности минимального рёберного 1-расширения $N$ -мерного гиперкуба для $N \geq 5$ . . . . .	53
Pierre Miasnikof. Statistical testing of clusterability . . . . .	56
Д. Б. Мокеев. Упаковки чётных путей в пороговых графах . . . . .	56
Moumanti Podder. On the ergodicity of a class of 1-dimensional probabilistic cellular automata with size-3 neighbourhoods . . . . .	58

---

Р. Р. Насыров, Е. Е. Васильева. Формирование сообществ в гиперграфах . . . . .	59
А. М. Неопрятная. Непрерывные вложения дистанционных графов в двумерную сферу . . . . .	63
Д. А. Шабанов. Об алгоритмических границах для свойств раскрасок случайных гиперграфов . . . . .	64
Г. М. Соколов. Сложность распознавания мультидистанционных графов в $\mathbb{R}^n$	65
А. Ю. Скоркин. Число насыщения в кнезеровском графе с простым циклом . . . . .	66
Н. А. Терехов, М. Е. Жуковский. Комбинаторный подход к исследованию чисел слабого насыщения в графах . . . . .	68
А. Д. Толмачев, Д. С. Протасов, В. А. Воронов. О разбиениях поверхности тора на части меньшего диаметра . . . . .	71
А. В. Трейер. О выразимости свойства нетеровости по уравнениям для графов	76
С. В. Вахрушев, М. Е. Жуковский. Максимальное число расширений в случайном графе . . . . .	78
Н. К. Верещагин. Новое семейство непериодических замощений плоскости квадратными плитками . . . . .	80
В. А. Воронов. Плотность $(n+1)$ -цветных точек в правильных раскрасках $n$ -мерного евклидова пространства . . . . .	83
Ю. Н. Яровиков, М. Е. Жуковский. Различные размеры индуцированных подграфов на $k$ вершинах в случайном графе . . . . .	84

## Пленарные доклады

### Universal graphs and adjacency labeling

Noga Alon  
Princeton University, USA

A graph  $G$  is universal for a given finite family  $F$  of graphs if it contains every member of  $F$  as an induced subgraph. The existence of small universal graphs for  $F$  is equivalent to the existence of an economical way to label the vertices of any member of  $F$  in a way that enables one to check whether or not two vertices are adjacent by reading their labels. The study of this topic received a considerable amount of attention during the last decades. I will discuss it, focusing on the asymptotic solution of a problem of Moon and Vizing from the 60s regarding universal graphs for the family of all  $n$ -vertex graphs, and the investigation of universal graphs for hereditary families with modest growth.

### Spread approximations for forbidden intersection problems

A. B. Kupavskii  
Moscow Institute of Physics and Technology

In this talk, we'll discuss a general method to approach Turan-type problems, which complements the existing Delta-system method and junta approximation method. We refer to it as 'spread approximations method', and it is based on the notion of  $r$ -spread families and builds on the recent breakthrough result of Alweiss, Lovett, Wu and Zhang for the Erdős–Rado 'Sunflower Conjecture'.

We will present some of its applications to the questions about intersecting families of sets and permutations.

### Динамика цен на акции: свойства и механизмы

А. В. Леонидов  
МФТИ, Долгопрудный

В лекции обсуждаются некоторые характерные свойства высокочастотной динамики цен на акции такие, как наличие длинной памяти по временам сделок, «market mill» свойство бивариатных распределений по инкрементам, теория ценового отклика на сделки и его различие при эндогенных и экзогенных воздействиях. Обсуждается также эквивалентность ценовой динамики для непрерывного двойного аукциона задаче о взаимодействии встречных потоков в узком отверстии.

## Секционные доклады. Теория игр и приложения

УДК 330.45+519.876:338.5

ББК 22.183.41

Ф 51

### Стратегические фирмы и ценополучатели в количественной олигополии без сговора: теоретико-игровые модели, равновесия, каскадные эффекты

А. Ю. Филатов

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

Пусть на рынке однородной продукции действуют  $n$  фирм с объемами поставок  $q_1, \dots, q_n$  и произвольными возрастающими функциями издержек  $TC_1(q_1), \dots, TC_n(q_n)$ . Отраслевой спрос задан некоторой убывающей функцией от суммарного выпуска  $p = p_D(Q)$ . Каждая фирма обладает рыночной властью и понимает, что, изменяя поставки, влияет на цену: чем сильнее снижаются ее поставки  $q_i$ , тем выше становится цена, а значит, при прочих равных условиях, и прибыль. В то же время, это влияние не полное, поскольку цена зависит еще и от поставок конкурентов, над которыми  $i$ -олигополист не властен.

Выписав прибыль  $i$ -фирмы и приравняв ее производную к нулю, можно найти кривую реакции, выпуск  $q_i$  в виде оптимальной зависимости от выпусков его конкурентов:  $q_i = q_i(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n)$ . При этом каждая фирма может выписать такую же функцию прибыли, максимизировать ее и найти аналогичную кривую реакции. В результате мы получим систему из  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными. Ее решение (геометрически точка пересечения кривых реакции) – и есть равновесие Курно.

В то же время, эмпирические исследования показывают, что такое или, тем более, еще более сложное поведение не всегда реализуется на рынке, и реальные участники часто используют упрощенные стратегии. Тому есть несколько причин. Во-первых, фирмы могут просто не понимать, как устроен рынок и что существует некое оптимальное стратегическое поведение, позволяющее увеличить прибыли. Например, они могут выступать в роли ценополучателей, расширять выпуск, пока это остается выгодным (то есть цена превышает предельные издержки), и даже не чувствовать, что теряют при этом рыночную власть в виде возможности сделать наценку.

Вторая причина – упрощение поведения и экономия на издержках принятия решений и последующего мониторинга. Простые стратегии ценообразования – «издержки плюс» (когда фирма делает фиксированную надбавку к себестоимости) или установление цены на уровне конкурентов, конечно, лишают ее гибкости, а также части доходов, но обеспечивают легкость и оперативность в реагировании на любые изменения на рынке. Никаких сомнений, сбора данных и нетривиальных эконометрических моделей. Никаких дополнительных затрат на маркетинговые исследования и на специалистов в области анализа данных, а также рисков, что эти специалисты ошибутся и оставят фирму у разбитого корыта.

Ну а кроме того, не все данные легко получить. Даже если в компании отлично поставлен экономический учет, позволяющий достаточно точно оценить собственную функцию издержек, а также имеется аналитический отдел, который может на основе ретроспективных данных о продажах адекватно оценить спрос (кстати, это означает, что продажи массовые, и нет никаких шоковых изменений), сложной задачей

остаётся оценка издержек конкурентов. Как правило, здесь используются не всегда обоснованные соображения симметрии или теория выявленных предпочтений, в рамках которой предполагается рациональное и максимизирующее прибыль поведение всех участников рынка, что также не всегда адекватно реальности.

Рассмотрим рынок, на котором присутствуют как стратегические фирмы, действующие в рамках рассмотренной выше модели Курно, так и ограниченно рациональные компании, выбирающие оптимальные объёмы производства из условия равенства цены и предельных издержек.

Если такое «близорукое» поведение происходит в одностороннем порядке, оно заведомо приводит к сокращению прибылей относительно фирм, действующих по Курно. Однако следует учесть, что конкуренты также будут подстраиваться под изменившиеся параметры равновесия, и в некоторых случаях ценополучатели могут даже увеличить прибыли.

Формализуем модель. Предположим, что на рынке с линейным спросом  $p = a - bQ$  действуют  $n$  одинаковых фирм, производящих однородную продукцию с квадратичными издержками  $TC(q) = dq^2 + cq + f$ . Пусть  $k$  стратегических фирм действуют по Курно, а остальные  $m$  – выступают ценополучателями. Будем далее индексом  $k$  обозначены поставки и прибыли фирм, действующих по Курно, а индексом  $m$  – поставки и прибыли ценополучателей. Учтём также предположение о том, что на рынке действуют одинаковые по размеру фирмы, в связи с чем нас будет интересовать симметричное равновесие. В работе доказаны следующие свойства:

1. Оптимальные объёмы поставок ценополучателей превышают объёмы поставок фирм, действующих по Курно в фиксированное число раз, не зависящее от числа тех и других фирм, и определяющееся исключительно параметрами функций спроса и издержек, а именно, соотношением коэффициентов  $b$  и  $d$ .
2. При фиксированном количестве фирм на рынке переход части из них в ценополучатели сокращает поставки каждой из них, увеличивает суммарные поставки продукции и роняет цены.
3. При наличии на рынке единственного ценополучателя его объём поставок всегда превышает оптимальный для лидера по Штакельбергу. В то же время прибыли могут как превышать исходные прибыли Курно-конкурентов, так и быть меньше их (в последнем случае становится ценополучателем невыгодно).
4. На выгодность или невыгодность перехода фирм в число ценополучателей не влияют коэффициенты  $a$ ,  $c$ ,  $f$ , однако влияет соотношение коэффициентов  $b$  и  $d$ , число фирм на рынке  $n$  и число ценополучателей  $m$ .
5. Вероятность того, что ценополучателем становится выгодно, невелика, но, как правило, увеличивается при росте параметров  $n$  и  $b$ , а также уменьшении параметров  $m$  и  $d$ . То есть быть ценополучателем выгодно на большом рынке с неэластичным спросом и большим числом фирм, издержки которых растут медленно. Ценополучателей при этом должно быть мало, в идеале – единственный. Точнее последнее свойство звучит так: при любом фиксированном числе ценополучателей  $m$  есть такое суммарное количество фирм на рынке  $n_0$ , что при  $n > n_0$  существует диапазон  $\alpha \in [\alpha_{min}; \alpha_{max}]$ , в котором при  $b = 2\alpha d$  ценополучателем становится выгоднее, чем быть стратегической фирмой. Диапазон асимметрично (сильнее вправо) расширяется при росте  $n$ .

Итак, даже 3-4 фирмы могут с пользой для себя перейти в ценополучатели только при таком большом количестве Курно-конкурентов, которые просто не смогут разместиться – не забываем про постоянные издержки. Тем не менее, последовательный переход фирм на такую стратегию вполне вероятен.

Пусть первая из фирм переходит на стратегию ценополучателя, увеличивая свои прибыли. Однако, тем самым она расширяет предложение на рынке, в результате чего происходит снижение цен и прибылей «стратегических» конкурентов. И в этой новой реальности, которой стратегические фирмы не могут противостоять, прибыль ценополучателя смотрится уже достаточно неплохо. Таким образом, вторая фирма может перейти в состав ценополучателей. А дальше наступает цепная реакция. Спустя некоторое время все фирмы могут перейти в состав ценополучателей, несмотря на то, что это очень сильно уменьшит их потенциальные прибыли. Это означает, что мы наблюдаем еще один пример дилеммы заключенных, только не в классическом формате ценовой олигополии, а в формате олигополии количественной.

Некоторым доводом в защиту устойчивости равновесия Курно являются издержки переключения – фирма не станет переходить на новую стратегию, если ожидаемый эффект от этого не превысит определенной суммы. Кроме того, поскольку эффект по мере перехода все большего числа фирм в состав ценополучателей ослабляется, наступит момент, когда последующие фирмы не захотят менять поведение. И на рынке возникнет устойчивое состояние, в котором часть симметричных фирм будет ценополучателями, а часть продолжит стратегическое поведение в рамках идеологии Курно.

УДК 519.834

ББК 22.183.2

Г 85

## Характеристические функции для дилеммы заключённого п лиц на сети

А. Л. Гриних<sup>1,2</sup>, Л. А. Петросян<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург

<sup>2</sup>Научно-Исследовательский Университет «Высшая Школа Экономики»,  
Санкт-Петербург

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00051*

**Аннотация.** В данной работе рассматриваются различные варианты построения характеристической функции для игры типа «дилемма заключённого п лиц» на сети, в зависимости от необходимых условий для дальнейшего исследования модели. Каждый из рассматриваемых вариантов преследует своей целью либо представить возможность получения временной устойчивости нормативных принципов оптимальности при дальнейшем многократном повторении игры, либо получения непустого ядра, а также достижения иных характеристик строящейся модели.

## Characteristic functions for n-person prisoner's dilemma on the network

A. L. Grinikh<sup>1,2</sup>, L. A. Petrosyan<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saint Petersburg State University, Saint-Petersburg

<sup>2</sup>National Research University "Higher School of Economics", Saint-Petersburg

*This research was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-11-00051*

Рассмотрим «дилемму заключённого n лиц» с попарным взаимодействием на сети. Аналогично стандартной дилемме заключённого двух лиц, все игроки имеют только две чистые стратегии  $C$  («молчать») и  $D$  («предать»).

Строится статическая игра  $\gamma_M$ , в которой множество игроков задано, как  $N$ , а его мощность равна  $|N| = n$ . Положим, что  $X_i$  является набором чистых стратегий игрока  $i$ ,  $x_i \in (C, D)$ ,  $\forall i \in N$  [1].

Положим, что  $\bar{x}_N^i$  является количеством игроков из множества  $N$ , смежных с игроком  $i$ .

Выигрыш  $i$ -го игрока,  $H_i$ , зависит от стратегии игрока  $i$  и количества смежных ему игроков, выбравших стратегию  $C$ ,  $x_N^i$ ,  $\forall i \in N$ :

$$H_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \begin{cases} C_i(x) = a_1 x_N^i + b_1, \forall x \in (0, n], & \text{если } x_i = C \\ \text{и } x_N^i \text{ игроков смежных } i\text{-му из множества } N \\ \text{выбирают стратегию } C, \\ D_i(x) = a_2 x_N^i + b_2, \forall x \in [0, n), & \text{если } x_i = D \\ \text{и } x_N^i \text{ игроков смежных } i\text{-му из множества } N \\ \text{выбирают стратегию } C. \end{cases}$$

Функция выигрыша  $i$ -го игрока,  $H_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ , удовлетворяет следующим ограничениям:

- $a_1 x_N^i + b_1 < a_2 x_N^i + b_2$ ,  $\forall x_N^i \in [0, \bar{x}_N^i]$ , поскольку  $D$  доминирует  $C$ ,  $\forall i \in N$ .
- $a_1 \bar{x}_N^i + b_1 > b_2$ , поскольку  $H_i(C, \dots, C) > H_i(D, \dots, D)$ .
- $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ , таким образом,  $a_1 x_N^i + b_1 \geq b_1$  и  $a_2 x_N^i + b_2 \geq b_2$ .

Коэффициенты  $a_1, a_2, b_1, b_2$  подбираются с учётом перечисленных трёх предположений, при этом, зачастую  $a_1 = a_2$ , а  $b_2 > b_1$ , что, как видно, не противоречит ни одному из трёх выдвинутых ранее предположений, а также позволяет обеспечить возможность рассматривать модель для больших величин  $n$ .

**Определение 1.** Задано множество игроков,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Любое непустое подмножество множества  $N$ ,  $S \subseteq N$ , называется *коалицией*.

**Определение 2.** Под *характеристической функцией* игры  $n$  лиц подразумевается функция  $V(S)$ , которая ставит в соответствие каждой коалиции значение  $V : 2N \rightarrow R$  таким образом, что  $V(S)$  является выигрышем коалиции  $S \subseteq N$ .

**Определение 3.** *Кооперативным решением* является профиль стратегий игроков, который максимизирует суммарный выигрыш всех игроков.

**Теорема 1. Кооперативное решение** В кооперативном решении игрок  $i$  выбирает свою чистую стратегию  $C$ , если количество смежных ему игроков на сети  $M$  удовлетворяет условию:

$$\bar{x}_N^i \geq \frac{b_2 - b_1}{2a_1 - a_2}. \quad (1)$$

**Построение характеристической функции для дилеммы заключённого  $n$  лиц с попарным взаимодействием (Метод 1.)**[2].

Для единичной коалиции:

$$V(i) = \max \{a_1 + b_1; b_2\} = b_2, \forall i \in N$$

Для любой коалиции  $S \subseteq N$ :

$$V(S) = \sum_{i \in S} H_i \left( x_1, x_2, \dots, x_n : x_j = \begin{cases} C, & \text{если } \bar{x}_S^j \geq \frac{b_2 - b_1}{2a_1 - a_2} \text{ и } j \in S, \\ D, & \text{иначе.} \end{cases} \right)$$

Для максимальной коалиции:

$$V(N) = \sum_{i \in N} H_i \left( x_1, x_2, \dots, x_n : x_j = \begin{cases} C, & \text{если } \bar{x}_N^j \geq \frac{b_2 - b_1}{2a_1 - a_2}, \\ D, & \text{иначе.} \end{cases} \right)$$

**Построение характеристической функции для дилеммы заключённого  $n$  лиц с попарным взаимодействием (Метод 2.)**

Для единичной коалиции:

$$V(i) = \max \{a_1 + b_1; b_2\} = b_2, \forall i \in N$$

Для любой коалиции  $S \subseteq N$ :

$$V(S) = \sum_{i \in S} H_i \left( x_1, \dots, x_n : x_j = \begin{cases} C, & \text{если } \bar{x}_S^j \geq \frac{b_2 - b_1}{2a_1 - a_2} \text{ \& } j \in S, \\ & \text{или } \bar{x}_N^j \geq \frac{b_2 - b_1}{2a_1 - a_2} \text{ \& } j \in N \setminus S, \\ D, & \text{иначе.} \end{cases} \right)$$

Для максимальной коалиции:

$$V(N) = \sum_{i \in N} H_i \left( x_1, x_2, \dots, x_n : x_j = \begin{cases} C, & \text{если } \bar{x}_N^j \geq \frac{b_2 - b_1}{2a_1 - a_2}, \\ D, & \text{иначе.} \end{cases} \right)$$

**Построение характеристической функции для дилеммы заключённого  $n$  лиц с попарным взаимодействием (Метод 3.)**

Для единичной коалиции:

$$V(i) = \max \{a_1 + b_1; b_2\} = b_2, \forall i \in N$$

Для любой коалиции  $S \subseteq N$ :

$$V(S) = \sum_{i \in S} H_i \left( x_1, x_2, \dots, x_n : x_j = \begin{cases} C, & \text{если } \bar{x}_N^j \geq \frac{b_2 - b_1}{2a_1 - a_2}, \\ D, & \text{иначе.} \end{cases} \right)$$

Для максимальной коалиции:

$$V(N) = \sum_{i \in N} H_i \left( x_1, x_2, \dots, x_n : x_j = \begin{cases} C, & \text{если } \bar{x}_N^j \geq \frac{b_2 - b_1}{2a_1 - a_2}, \\ D, & \text{иначе.} \end{cases} \right)$$

Аналогичным образом строятся три варианта характеристической функции для игры типа «дилемма заключённого  $n$  лиц» на сети с дисконтированным влиянием. Проводится анализ характеристик моделей, в том числе временной устойчивости нормативных принципов оптимальности для различных вариантов построения характеристических функций получившихся моделей при многократном их повторении. Дается оценка эффективности применения каждой из построенных характеристических функций для повторяющихся игр.

*Литература*

- [1] Grinikh A.L., Petrosyan L.A. An effective punishment for an n-person prisoner's dilemma on a network // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. 2021. Vol. 27 (3). P. 256–262.
- [2] Grinikh A.L., Petrosyan L.A. Cooperative n-person Prisoner's Dilemma on a Network // Contributions to Game Theory and Management. 2021. Vol. 14. P. 122–126.

*Сведения об авторах*

**А. Л. Гриних**, инженер-исследователь, alexsandrgrinikh@gmail.com.

**Л. А. Петросян**, д-р физ.-мат. наук, декан факультета Прикладной математики - процессов управления, l.petrosyan@spbu.ru.

УДК 519.834  
ББК 22.183.2  
Г 85

## Множественно-весовые игры

В. В. Гусев

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”  
*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22-21-20070, <https://rscf.ru/project/22-21-20070/> и поддержано регионом Санкт-Петербург*

**Аннотация.** *Покрытие транспортной, социальной, коммуникационной сети это сложная вычислительная задача. Для её решения в (Gusev, 2021) вводится специальный класс простых игр, в которых множество минимальных выигрывающих коалиций совпадает с множеством наименьших покрытий. Особенность такой игры в том, что у неё существует весовая форма, причём веса и квота это некоторые множества, а не действительные числа. Класс таких игр назван множественно-весовыми. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых простая игра это множественно-весовая игра. Доказано, что класс множественно-весовых игр является замкнутым относительно операций объединения и пересечения. Для весовых игр такое утверждение не выполняется.*

## Задача покрытия множества

Задача покрытия является классическим вопросом многих областей науки и формулируется следующим образом. Предполагается, что есть некоторое множество объектов  $U$  и семейство его подмножеств  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Требуется найти такое множество  $K \subseteq N$  чтобы  $U \subseteq \cup_{i \in K} s_i$  и  $K$  состояло из наименьшего числа элементов. Множество  $K$  называются минимальным покрытием множества  $U$ . Известно, что нахождение  $K$  это NP полная задача. Например, пусть  $U = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $s_1 = \{a, b\}$ ,  $s_2 = \{b, c, d\}$ ,  $s_3 = \{c, e\}$ ,  $s_4 = \{a, d\}$ . Тогда мы имеем несколько минимальных покрытий  $K_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $K_2 = \{1, 3, 4\}$ ,  $K_3 = \{2, 3, 4\}$ .

Классическая задача покрытия задаётся тройкой  $(N, U, S)$ . Под решением такой задачи подразумевается нахождение минимального покрытия. Однако, минимальное покрытие может уступать по свойствам не минимальному. Например, если в транспортной сети появятся новые дороги или перекрёстки, то минимальное покрытие с большей вероятностью перестанет быть покрытием. Аналогичные рассуждения также справедливы для других прикладных областей. Можно сказать, что минимальное покрытие не устойчиво к изменению  $U$  или  $S$ . Принятие какого-либо решения, основываясь только на минимальном покрытии, в будущем может привести к негативным последствиям. Если заранее не известно какие произойдут изменения, нужно брать во внимание не только минимальное, но и другие покрытия.

В данной работе вводится простая кооперативная игра  $(N, v)$ , которая учитывает все покрытия множества  $U$ . Значение коалиции  $K$ ,  $K \subseteq N$  равно 1, если  $K$  это покрытие множества  $U$ , то есть  $U \subseteq \cup_{i \in K} s_i$ . Если  $K$  это не покрытие, то значение коалиции равно 0. Множество  $s_i$  это вес игрока  $i$ ,  $i \in N$ , а  $U$  это квота. Так как веса и квота это множества, простая кооперативная игра  $(N, v)$  названа множественно-весовой.

## Множественно-весовые игры

### Определение

Пусть  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  это множество игроков и  $U, s_1, s_2, \dots, s_n$  это множества объектов, причем  $U \subseteq \cup_{i \in N} s_i$ . Дадим определение множественно-весовой игры.

**Определение 1.** *Множественно-весовая игра это простая игра  $(N, v)$ , для которой существует набор множеств  $[U; s_1, s_2, \dots, s_n]$ , таких, что*

$$v(K) = \begin{cases} 1, & U \subseteq \cup_{i \in K} s_i; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Характеристическая функция множественно-весовой игры является монотонной и принимает значения 0 и 1. Так как  $U \subseteq \cup_{i \in N} s_i$ . то  $v(N) = 1$ . Обозначим  $SW(N)$  пространство всех множественно-весовых игр с игроками из  $N$ . Набор множеств  $[U; s_1, s_2, \dots, s_n]$  будем называть весовой формой множественно-весовой игры  $(N, v)$ .

Коалиция  $K$ ,  $K \subseteq N$  является выигрывающей в множественно-весовой игре если и только если  $K$  это покрытие множества  $U$ . Если количество элементов в множестве  $U$  велико, то нахождение всех покрытий и их анализ это сложная вычислительная задача. Однако, весовая форма множественно-весовой игры хранит в себе информацию о всех покрытиях множества  $U$ . Чтобы проанализировать все покрытия, достаточно разработать методы анализа весовой формы.

Приведем пример простой игры, которая не является весовой, но является множественно-весовой. Например, это игра  $(N, v)$ ,  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $W^m(v) = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ . В такой игре не существуют действительные веса игроков и квота. Однако, у такой игры существует весовая форма с весами игроков в виде множеств,

$$[U; s_1, s_2, s_3, s_4],$$

$$U = \{a, b, c, d\}, s_1 = \{a, b\}, s_2 = \{c, d\}, s_3 = \{a, d\}, s_4 = \{b, c\}.$$

Далее, нас будут интересовать свойства множественно-весовых игр и их приложение. В следующем разделе найдены необходимые и достаточные условия, при которых простая игра является множественно-весовой.

## Свойства множественно-весовых игр

Если количество минимальных выигрывающих коалиций в простой игре велико, то это может затруднить её анализ. Используя операции объединения и пересечения можно декомпозировать исходную игру на более простые игры. Это позволит сократить количество минимальных выигрывающих коалиций или упростить исходную игру.

**Лемма 1.** Пусть  $(N, v)$  это множественно-весовая игра с весовой формой  $[U; s_1, s_2, \dots, s_n]$ . Представим множество  $U$  в виде  $U = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_r$ ,  $U_j \neq \emptyset \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}$ . Обозначим  $(N, v_j)$  множественно-весовую игру с весовой формой  $[U_j; s_1, s_2, \dots, s_n]$ . Тогда

$$v = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r.$$

**Теорема 1.** Простая игра  $(N, v)$  это множественно-весовая игра если и только если существуют простые игры  $(N, v_1), (N, v_2), \dots, (N, v_r)$  для которых выполняется

$$v = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r$$

и любая минимальная выигрывающая коалиция игры  $(N, v_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$  состоит из одного игрока, то есть  $\forall j \in \{1, 2, \dots, r\} \forall A \in W^m(v_j) : |A| = 1$ .

Поясним смысл функций  $v_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , описанных в Теореме 1. Предположим, что  $U$  это множество покрываемых объектов. Заметим, что каждая минимальная выигрывающая коалиция игры  $v_j$  состоит из одного игрока. Таким образом,  $W^m(v_j)$  состоит из игроков, которые могут покрыть объект  $j$ ,  $j \in U$ . Аналогичные необходимые и достаточные условия верны для игры вершинного покрытия графа (Gusev, 2020)

Для того, чтобы задать множественно-весовую игру достаточно определить  $U$  и веса игроков. Теорема 1 показывает другой способ введения множественно-весовой игры. Пусть имеется некоторый набор простых игр, причём минимальная выигрывающая коалиция любой игры состоит из одного игрока. Тогда пересечение таких игр это множественно-весовая игра. Теорема 1 позволяет задать множественно-весовую игру, заранее не зная весов игроков и множество  $U$ .

Объединение и пересечение это классические операции над простыми играми. Такие операции часто используются для преобразования игр. Интерес представляет следующий вопрос. Пусть имеется некоторый класс простых игр,  $(N, v)$  и  $(N, w)$  это две произвольные игры из этого класса. Принадлежат ли игры  $(N, v \vee w)$  и  $(N, v \wedge w)$

рассматриваемому классу? Для весовых игр ответ отрицательный. Например, пусть  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $W^m(v) = \{\{1, 2\}\}$ ,  $W^m(w) = \{\{3, 4\}\}$ . Весовые формы игр  $v$  и  $w$  имеют вид  $[2; 1, 1, 0, 0]$  и  $[2; 0, 0, 1, 1]$ , соответственно. Тогда  $W^m(v \vee w) = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ . Игра  $(N, v \vee w)$  не является весовой. Теперь, пусть  $N$  по прежнему состоит из четырех игроков и  $W^m(v) = \{\{1\}, \{2\}\}$ ,  $W^m(w) = \{\{3\}, \{4\}\}$ . Весовые формы игр  $(N, v)$  и  $(N, w)$  имеют вид  $[1; 1, 1, 0, 0]$  и  $[1; 0, 0, 1, 1]$ , соответственно. Тогда  $W^m(v \wedge w) = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$ . Игра  $(N, v \wedge w)$  не является весовой. Для множественно-весовых игр получен следующий результат.

**Теорема 2.** *Множество  $SW(N)$  является замкнутым относительно объединения и пересечения.*

Теорема 2 говорит о следующем. Пусть  $(N, v) \in SW(N)$  и  $(N, w) \in SW(N)$ . Тогда  $(N, v \vee w) \in SW(N)$  и  $(N, v \wedge w) \in SW(N)$ . Покажем, как можно использовать такой результат. Предположим, что нужно вычислить значение  $\varphi(v)$  множественно-весовой игры  $(N, v)$ , которое обладает свойством transfer. С помощью Леммы 1 характеристическую функцию  $v$  можно декомпозировать на более простые множественно-весовые игры, например,  $v = v_1 \wedge v_2$ . Тогда

$$\varphi(v) = \varphi(v_1 \wedge v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) - \varphi(v_1 \vee v_2).$$

Так как  $(N, v_1)$  и  $(N, v_2)$  это множественно-весовые игры, то из Теоремы 2 следует, что  $(N, v_1 \vee v_2)$  так же является множественно-весовой игрой. Такое преобразование  $\varphi(v)$  полезно в том случае, если весовая форма игры  $(N, v_1 \vee v_2)$  проще, чем  $(N, v_1 \wedge v_2)$ .

Тезисы являются русскоязычной версией источников [1,2].

### *Литература*

- [1] Gusev V.V. Set-weighted games and their application to the cover problem // European Journal of Operational Research. 2022. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.05.026>.
- [2] Gusev V.V. The vertex cover game: Application to transport networks // Omega. 2020. Vol. 97. 102102.

УДК 519.837  
ББК 22.183.2  
К 56

## Игра Изинга с одновременным участием многих агентов

А. М. Коваленко, А. В. Леонидов  
МФТИ, Долгопрудный

***Аннотация.** Были проведено изучение динамической игры Изинга с одновременным участием многих агентов. Были получены модифицированные формулы для популяционной динамики системы, которые, как оказалось, линейны по количеству одновременно играющих игроков  $k$ . Также было проведено исследование времён перехода из метастабильного состояния в зависимости от  $\alpha = k/N$  с применением формулы Крамера, а также программной симуляции модели. Было установлено, что при малых  $\alpha$  имеет место резкое уменьшение времени перехода, однако с дальнейшим увеличением в силу вступают дискретные эффекты, которые, наоборот, дольше удерживают систему в метастабильном состоянии.*

### Введение

В общем случае имеется  $N$  агентов, каждый из которых придерживается двух стратегий  $s = \{-1, 1\}$ . Соответствующая полезность для каждого агента представлена формулой:

$$U_i(s) = \left( H_i + \sum_{i \neq j} a_{ij} J_{ij} s_j \right) s + \varepsilon_s, \quad (1)$$

где  $H_i$  - сдвиг,  $a_{ij}$  - матрица связности,  $J_{ij}$  - величина связи,  $\varepsilon_s$  - случайная добавка, которая определяется из наперёд заданного распределения.

Мы рассматриваем случай полного графа, при котором принимаем  $H_i = H$ ,  $J_{ij} = J/N$ ,  $m \simeq \sum_{i \neq j} s_j/N$ . Тогда

$$U_i(s) = (H + mJ)s + \varepsilon_s. \quad (2)$$

В рассматриваемой динамической игре на каждом шаге выбираются новые  $\{\varepsilon\}$  для всех игроков в соответствии с неким распределением с плотностью вероятности  $\phi(x)$ , после чего  $k$  случайно выбранных агентов принимают решение изменить свою стратегию или нет. Вероятность выбрать стратегию  $s$  на каждом шаге одинакова для каждого игрока и определяется выражением

$$p = P(\varepsilon_{-s} - \varepsilon_s < 2s(H + mJ)) = F(2s(H + mJ)), \quad (3)$$

где  $F(x)$  - функция распределения, которая определена как

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \Phi(y) dy, \quad \Phi(y) = \int dz \phi(z) \phi(z + y). \quad (4)$$

## Одновременная игра

Поскольку нами рассматривается динамика, то интересно посмотреть, как со временем меняются характеристики всей системы. Подобной характеристикой является величина  $m$ . На шаге  $t$  мы можем записать для  $m$  следующее выражение, характеризующее популяционную динамику системы:

$$m(t) = \frac{N^+(t) - N^-(t)}{N}, \quad (5)$$

где  $N^+(t)$ ,  $N^-(t)$  количество агентов на шаге  $t$  со стратегиями  $s = 1$  и  $s = -1$  соответственно. Значение на следующем шаге определяется формулой  $m(t + 1) = m(t) + \Delta m(t)$ , где можно записать

$$\langle \Delta m \rangle = \langle \Delta m(t) \rangle = \sum_n \Delta_n P(\Delta_n) = \sum_{n=-k}^k \frac{2k}{N} P(\Delta_n = \frac{2k}{N}). \quad (6)$$

Здесь  $\Delta_n$  принимает все возможные значения изменения  $m(t)$  при одновременной игре  $k$  агентов. Минимально возможное изменение  $m$  равно  $N/2$ .

Исходя из формулы (6), можно составить точную формулу в терминах комбинаторики:

$$\begin{aligned} \langle \Delta m \rangle &= \sum_{\{x\}} \frac{k!}{x_1! x_2! x_3! x_4!} p^{x_1+x_3} (1-p)^{x_2+x_4} \times \\ &\times \frac{N^-!}{(N^- - x_1 - x_2)!} \frac{N^+!}{(N^+ - x_3 - x_4)!} \frac{(N-k)!}{N!} \frac{2}{N} (x_1 - x_4). \end{aligned} \quad (7)$$

откуда найдём

$$\langle \Delta m \rangle = -\frac{k}{N} (m + 1 - 2p). \quad (8)$$

Таким образом, с увеличением числа одновременно играющих агентов, действительно, происходит увеличение скорости стремления системы к равновесному состоянию.

## Переход из метастабильного состояния

При определённых параметрах в системе может возникать несколько равновесных состояний. Вследствие этого, если система находится в метастабильном состоянии, она с течением времени сможет совершить переход в более глубокий минимум. В нашей задаче в случае  $k = 1$  время перехода экспоненциально большое даже при небольшом потенциальном барьере.

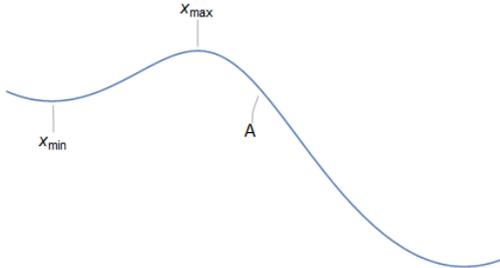


Рис. 1: График потенциала.

Интересно изучить переход из метастабильного состояния в более глубокий и устойчивый минимум в случае  $k > 1$ . Для оценки вероятности этого перехода может использоваться формула Крамерса, однако ввиду сложных коэффициентов диффузии и сдвига, данная формула обчисляется лишь численно.

Формула Крамерса выводится из уравнения Фоккера-Планка

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -D^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} P + D^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P \quad (9)$$

и имеет вид (см. Рис. 1):

$$\tau = \int_{x_{min}}^A \frac{e^{\Phi(x)}}{D^{(2)}(x)} dx \int_{x_{min}-\Delta}^{x_{min}+\Delta} e^{-\Phi(x)} dx, \text{ где } \Phi(x) = \ln D^{(2)}(x) - \int^x \frac{D^{(2)}(x')}{D^{(1)}(x')} dx'. \quad (10)$$

Были проведены программные симуляции данной модели Изинга (для случая, когда  $\{\varepsilon_s\}$  имеет распределение Гумбеля). По набранной статистике было установлено соответствие между экспериментом и численным расчётом по формуле Крамерса. Оказалось, что соответствие имеет место при малых  $\alpha = k/N$ . В этих случаях наблюдается резкое экспоненциальное уменьшение времени перехода, однако при дальнейшем увеличении  $\alpha$  происходит сильное затухание эффекта. По экспериментальным данным заметно, что при увеличении  $\alpha$  вступают в силу дискретные эффекты, при которых формула Крамерса уже не применима.

Одним из интересных наблюдений является небольшое увеличение времени перехода при больших  $\alpha$ . Таким образом, стартуя с  $\alpha = 0$  мы видим резкое уменьшение, затем замедление уменьшения и приход к некому минимуму, а после этого небольшое увеличение, которое продолжается вплоть до  $\alpha = 1$ .

УДК 519.87  
ББК 22.183.5  
К-17

## Моделирование и анализ централизованного распределения абитуриентов по образовательным программам в России

Н. С. Калинин<sup>1,2</sup>, А. Д. Кузьмина<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский Государственный Университет

<sup>2</sup>НИУ ВШЭ, Лаборатория теории игр и принятия решений

***Аннотация.** Одним из ярких примеров дизайна экономических механизмов является дизайн системы поступления абитуриентов в вузы. Мы представляем результаты моделирования динамической версии алгоритма Гэйла-Шепли и обсуждаем вопросы скорости его сходимости.*

*В России процесс поступления в вузы связан с рисками. Многие абитуриенты до самого конца, пока вуз не выложит списки поступивших, не могут быть уверены, будут ли они приняты на программу, куда принесли согласие на зачисление. В этом докладе будет анализироваться централизованная система распределения абитуриентов на программы. Главным ее плюсом является то, что риски, связанные с поступлением, после того как абитуриент составит список программ, куда хочет поступить, отсутствуют. Будут приведены результаты моделирования новой системы на синтетических данных. Также будут описаны случаи, мешающие быстрому распределению абитуриентов.*

### Modeling and analysis of centralized distribution system of applicants for educational programs in Russia

Kalinin N. S.<sup>1,2</sup>, Kuzmina A. D.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>St. Petersburg State University, Russian Federation, 199034, Universitetskaya emb., 7/9

<sup>2</sup>National Research University Higher School of Economics, Laboratory of Game Theory and Decision Making, Russian Federation, 194100, Kantemirovskaya st., 3A building 1

До 2021 года приемная кампания в вузы России проходила в две волны. В 2021 году оставили только одну. Мы считаем, что именно это стало причиной снижения проходного балла на сильных программах. В докладе будет более подробно рассказано про процесс поступления и приведены результаты анализа проходных баллов на программы за 2019 и 2021 года.

Мы предлагаем новую централизованную систему поступления, динамическую версию алгоритма Гэйла-Шепли. Каждый абитуриент выбирает не более  $K$  программ, на которых будет участвовать в конкурсе на зачисление. Далее он составляет упорядоченный список предпочтений, где располагает программы от наиболее приоритетной до наименее. После каждая программа формирует упорядоченный список, где ранжирует всех абитуриентов, которые включили ее в свои списки предпочтений, по заранее известным критериям.

В новой системе программы каждый день отправляют приглашения абитуриентам при наличии свободных мест. У каждого абитуриента есть три стратегии, при

получении приглашения. Он может отказаться от программы, принять приглашение предварительно и принять приглашение насовсем. Считается, что как только абитуриенту присылает приглашение новая программа – он автоматически предварительно принимает от нее приглашение. Если в какой-то момент абитуриент предварительно принял приглашение от более одной программы - у него есть не более 2 дней, чтобы оставить приглашение ровно одной программы, а остальным прислать отказ. Также у абитуриента есть опция в любой момент принять приглашение от программы насовсем. В этом случае он автоматически отказывается от конкурса на всех остальных программах, включая те, которые еще не прислали ему приглашение, и они вычеркивают этого абитуриента из своих списков.

Основная волна проходит фиксированное количество дней. Так как после распределения могут остаться свободные места на программах и не зачисленные абитуриенты, которые не приняли приглашения насовсем или кому так и не пришло ни одно приглашение – мы предлагаем провести донабор.

У данного механизма существует несколько преимуществ. Во-первых, меньше рисков для абитуриентов, если хотя бы одна программа прислала приглашение - абитуриент автоматически становится предварительно зачислен. Во-вторых, увеличивается количество выбираемых абитуриентом программ. Ему не нужно нести согласие на зачисление в одно место. В-третьих, зачисление можно назвать более честным. Если два абитуриента выбрали одну и ту же программу, то абитуриент с более высокими баллами для нее будет более приоритетным и ему всегда приглашение будет приходиться раньше, чем абитуриенту с баллами ниже.

Одним из главных вопросов является оценка скорости сходимости данного алгоритма. В докладе будут приведены результаты симуляции распределения абитуриентов по программам. Также будет показано, что если количество абитуриентов не меньше суммарного количества мест на всех программах, то алгоритм сходится за время, которое не увеличивается с ростом числа абитуриентов.

Однако, хоть на симуляциях распределение происходит за разумное время, существует несколько крайних случаев, которые замедляют скорость сходимости алгоритма. Во-первых, это заполнение почти всех мест. Если на программах остается всего пару мест - их заполнение может происходить очень долго. Во-вторых, это программы, которые абитуриенты с высокими баллами выбрали как запасной план. Это значит, что абитуриенты не собираются на нее идти, но добавили ее в свой список, чтобы точно поступить. Программа будет стоять у таких абитуриентов на одном из последних мест в списке приоритетов.

Мы предлагаем несколько вариантов устранения таких ситуаций. Во-первых, проведение основной волны фиксированное количество дней (например, двадцать). После основной волны проводится донабор. Во-вторых, стимулирование абитуриентов предварительно отказываться от программ, от которых им еще не пришло приглашение, куда они точно не пойдут, так как им уже пришло приглашение от более приоритетной программы. Таким образом программы будут предлагать места только тем абитуриентам, кто еще может согласиться быть на нее зачисленным.

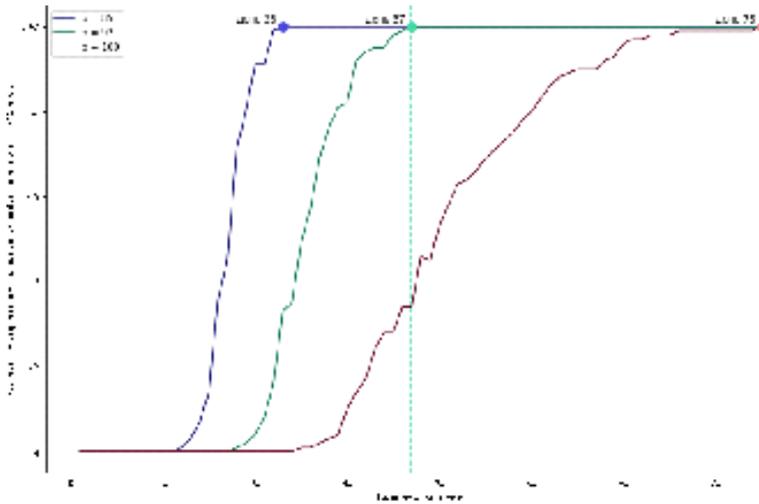


Рис. 1: Результаты моделирования при 100 программах, на каждой программе 60 мест, количество абитуриентов 15000, список предпочтений размера 10

### *Литература*

- [1] Теория и практика двусторонних рынков (Нобелевская премия по экономике 2012 года) / Е.Б. Железова, С.Б. Измалков, К.И. Сонин [и др.] // Вопросы экономики. 2013. № 1. С. 4-26.
- [2] Nesterov A. Comparing school choice and college admissions mechanisms by their strategic accessibility // Theoretical Economics. 2021. Vol. 16. P. 881-909.
- [3] Gale D., Shapley L.S. College Admissions and the Stability of Marriage // The American Mathematical Monthly. 1962. Vol. 69 (1). P. 9-15.

### *Сведения об авторах*

**Калинин Н.С.**, Доцент СПбГУ, снс ВШЭ, n.kalinin@spbu.ru

**Кузьмина А. Д.**, студент СПбГУ ФМКН, стажер-исследователь международной лаборатории теории игр и принятия решений ВШЭ, kuzminash@list.ru

УДК 519.837  
ББК 22.183.2  
С-17

## Betweenness centrality in network formation game

И. А. Самойленко  
МФТИ, НИУ ВШЭ

Графы являются распространенным способом моделирования многих процессов (социальные, технологические, трофические сети и т.д.). При изучении графов особенно важен вопрос о том, какие связи образуются в сети и в чем заключается причина образования этих связей. Существуют вероятностные модели возникновения сетей, которые имитируют достаточно большое количество хороших (с точки зрения эмпирических наблюдений) свойств: малый диаметр, высокий коэффициент кластеризации, масштабируемость, ассортативность и наличие плотного ядра. Такие модели включают в себя в частности модель Эрдеша-Реньи [1], модель Уоттса-Строгаца [2], различные модели предпочтительного присоединения, такие как модель Барабаши-Альберта [3], Бакли-Остгуса [4], РА-класс моделей предпочтительного присоединения [5] и ряд модификаций этих моделей [6]. Вероятностные модели позволяют получать нерегулярные структуры, характерные реальным сетям (в качестве примера регулярных структур мы можем рассмотреть полный граф, цикл, полный двудольный граф, звезду и т.д. и существование таких структур в вышеописанных моделях крайне маловероятно). Более того, усложняя некоторые из моделей можно получить обширный набор желаемых свойств (например, запуск эпидемии на графах полученных при помощи модели Уоттса-Строгаца позволяет получить большинство из них). Тем не менее, несмотря на вышеперечисленные преимущества, вероятностные модели имеют важный недостаток: они не в полной мере объясняют возникновение или наоборот отсутствие каждой конкретной связи, тогда как эмпирические наблюдения показывают, что связи в сетях формируются не случайно, а скорее с определенной целью. Эта служит мотивацией для изучения теоретико-игровых моделей формирования сетей.

В таком классе моделей каждая вершина является рациональным агентом, который в зависимости от образованных им связей платит некоторую цену и в зависимости от некоторой функции выигрыша, связанной с топологической структурой графа, получает некоторую выгоду. В качестве таких функций полезности обычно используются различные центральности (степень вершины, центральность близости и т.д.). Далее анализируются равновесные по Нэшу состояния. Первой работой в этой области стала работа Бала-Гойала [7], в которой рассматривалась возможность использовать в качестве функции выигрыша количество вершин в компоненте связности агента или же гармоническую центральность. Хотя эта работа послужила развитию всей области равновесия наблюдаемые в ней не соотносились с эмпирическими наблюдениями сложных сетей: поддерживаемыми в тех или иных условиях были только пустой граф, звезда и полный цикл. В дальнейшем были также использованы и другие функции выигрыша, например, в модели Баутбера-Кернса [8] рассматривался кластерный коэффициент вершины. Однако полученные равновесия как и в модели Бала-Гойала также оказались регулярными. Одним из способов получить нерегулярные по структуре равновесия стал гиперграфовый подход Чайес-Боргса [9] примененный вместе с функцией полезности являющейся степенью вершины. В этой модели авторы смогли доказать поддерживаемость хороших свойств сети, но

эти свойства поддерживаются в различных равновесиях, а также присутствует множество равновесных сетей, в которых ожидаемые от типичной сложной сети свойства не выполняются (в частности, полный граф всегда является поддерживаемым, если существует хотя бы какое-то непустое равновесие). В попытке развить эту область автором была предложена принципиально новая модель, использующая аналог центральности посредничества (betweenness centrality) в качестве функции выигрыша. Центральность посредничества в ряде исследовательских работ отмечалась как успешная метрика для поиска наиболее важных вершин в сети [10] однако до сих пор не использовалась в моделях формирования сетей. В этой работе также учитываем важность “уникальности” посредничества – агенту выгоднее быть посредником в короткой цепочке посредников, чем быть одним из многих в длинной.

В работе предложено использование модели, в которой каждая величина в одностороннем порядке платит за образование связи в графе, а взвешенная betweenness centrality (описанная выше центральность) используется как функция выигрыша каждой вершины. Анализируются устойчивые сети: те, образование которых является равновесным по Нэшу. В работе вводится понятие  $k$ -независимого множества известное ранее, однако используемое исключительно в контексте вычислительной сложности. Автором же предложена физическая интерпретация смысла 2-независимости. При помощи анализа 2-независимых множеств в вышеописанных условиях доказано что если взвешивание betweenness происходит при помощи любой убывающей (от размера цепочки посредников) функции  $f(x)$ , то при издержке на проведение ребра не превосходящей  $\sqrt[3]{\frac{f(2)-f(6)}{16}} \times \sqrt[3]{N} \times (f(2) - f(5))^2 + f(2) - f(6)$  где  $N$  – количество вершин в сети, устойчивые сети будут иметь диаметр не более 6. Также будет доказан аналог ассортативности и введена интуиция относительно коэффициента кластеризации. Полученный результат обобщён на гиперграфовую модель Чайес-Боргса. В рамках рассмотрения модели Чайес-Боргса будет показано, что наблюдаемый феномен автостопа (два агента могут образовать связь за счёт усилий третьих лиц) при замене функции выигрыша на взвешенную betweenness centrality пропадает, а также ряд плохих равновесий, поддерживаемых равновесными сетями, перестают быть устойчивыми. В рамках работы далее предложена модификация модели, в рамках которой вершины образуют связь бесплатно если у них достаточно много общих соседей (реализуется идея знакомства через общих знакомых) и в этой модификации показано существование равновесий с высоким коэффициентом кластеризации

После этого на рассмотрение предложен класс моделей с гетерогенными (неодинаковыми) издержками на образование связей – агенты размещаются в целочисленных точках  $k$ -мерного куба со стороной  $n$ , а издержки на проведения связи зависят от евклидова расстояния между вершинами. Для такого класса моделей также опробована модель с функцией выигрыша – взвешенной betweenness centrality. Доказано, что при  $k \geq 3$  при существует ограничение при котором сети также удовлетворяют правилу 6 рукопожатий.

В конце работы будет показана фундаментальность механизма следования сетей к супермалому диаметру. Автором будут показаны результаты совместной с D. Aleja , E. Primo , K. Alfaro-Bittner, E. Vasilyeva, K. Kovalenko, D. Musatov, A.M. Raigorodskii, R. Criado, M. Romance, D. Rapo, M. Perc and S. Boccaletti работы в рамках которой помимо теоретико-игровой составляющей была предложена модель роста графа, основывающаяся на схожем принципе – формирование ребра происходит если вершина получает выигрыш во взвешенной betweenness centrality, а остановка процесса роста

происходит в момент, когда связи перестают образовываться. В таких условиях в симуляциях показано, что диаметр получающихся сетей ограничен  $b$ , тогда как случайное добавление такого же количества рёбер приводит к логарифмическому росту диаметра вместе с ростом размера сети.

### *Литература*

- [1] Erdos P., Reeny A. On Random Graphs I // Publicationes Mathematicae Debrecen. 1959. Vol. 6. P. 290–297.
- [2] Strogatz S.H., Watts D.J. Collective dynamics of small-world networks // Nature. 1998. Vol. 93 (6684). P. 440–442.
- [3] Albert R., Barabasi A.-L. Statistical mechanics of complex networks // Reviews of Modern Physics. 2002. Vol. 74. No. 1. P. 47–97.
- [4] Buckley P.G., Osthus D. Popularity based random graph models leading to ascale-free degree sequence // Discrete mathematics. 2004. Vol. 282 (1–3). P. 53–68.
- [5] Avrachenkov K., Kadavankandy A., Ostroumova A., Prokhorenkova L., Raigorodskii A. PageRank in Undirected Random Graphs // Internet Mathematics. 2017.
- [6] Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.–U. Complex networks: Structure and dynamics // Physics Reports. 2006. Vol. 424. P. 175–308.
- [7] Bala V., Goyal S. A Noncooperative Model of Network Formation // Econometrica. 2003. Vol. 68 (5). P. 1181–1229.
- [8] Brautbar M., Kearns M. A Clustering Coefficient Network Formation Game // Algorithmic Game Theory: 4th International Symposium. 2011.
- [9] Borgs C., Chayes J., Ding J., Lucier B. The Hitchhiker’s Guide to Affiliation Networks: A Game-Theoretic Approach, 2010.
- [10] Padgett J.F., Ansell C.K. Robust Action and the Rise of the Medici, 1400–1434 // American journal of sociology. 1993. Vol. 98 (6). P. 1259–1319.

УДК 519.857  
 ББК 22.183.47  
 А 72

## Самовозбуждающаяся игра с бинарным выбором

А. П. Антонов<sup>1</sup>, А. В. Леонидов<sup>1,2</sup>, А. Г. Семенов<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Физический Институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский Физико-Технический Институт, Долгопрудный, Россия

<sup>3</sup>НИУ ВШЭ, Москва, Россия

***Аннотация.** В работе рассмотрена игра с бинарным выбором  $N$  агентов на графе в непрерывном времени. При этом активность каждого агента (скорость пересмотра своей стратегии в единицу времени) зависит от того, как часто окружающие его соседи меняют стратегию. В зависимости от параметров динамическое поведение системы может быть различным. В частности, за счет явления самовозбуждения системы, в ней может уменьшиться время перехода между различными метастабильными состояниями. Также, при некоторых параметрах системы, в игре может произойти лавинообразный переход из одного локального равновесия в другое. В работе построено теоретическое описание динамического поведения игры, а также исследован случай полного графа.*

### Self-excited game with binary choice

A. P. Antonov<sup>1</sup>, A. V. Leonidov<sup>1,2</sup>, A. G. Semenov<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>P.N. Lebedev Physical Institute, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

<sup>3</sup>HSE University, Moscow, Russia

Исследование игр с бинарным выбором представляет собой особый интерес из-за существования аналогии со статистической физикой спиновых систем [2]. Эти параллели особенно интригуют из-за принципиально разных истоков равновесия в теории игр и статистической физике: в теории игр равновесие является результатом уравновешивания индивидуальных интересов, в то время как в статистической физике равновесие - это поиск глобального минимума свободной энергии [3]. Динамика игр агентов, однако, может принципиально отличаться от динамики спиновых систем из-за множества возможных механизмов. Например, одним из интересных механизмов, который не имеет прямых аналогов в статистической физике, является динамика с самовозбуждением, которая изучалась для так называемых процессов Хокса [4], когда активность отдельного агента зависит от того, как изменялось состояние системы в прошлом.

В данной работе будет рассмотрена зашумленная игра с бинарным выбором в непрерывном времени, в которую играют  $N$  агентов на графе. Время от времени агенты могут пересмотреть свою стратегию в зависимости от того, какую стратегию выбрали их соседи. Наличие шума приводит к тому, что выбор стратегии происходит случайным образом с некоторыми вероятностями того или иного исхода. При этом активность агента или, иными словами, то, как часто он пересматривает свою стратегию, также изменяется со временем в зависимости от предистории. Прежде чем

перейти к описанию системы в целом опишем подробно поведение отдельно взятого агента.

## Поведение одного агента

Рассмотрим поведение отдельного агента. Каждый агент в некоторый фиксированный момент времени описывается своей текущей стратегией  $s_i$  (или его текущим выбором равным  $+1$  или  $-1$ ) и активностью  $\lambda_i(t)$ . Это означает, что на малом интервале времени  $(t, t + \delta t)$  он с вероятностью  $\lambda_i(t)\delta t$  будет пересматривать свою стратегию ориентируясь на окружающих его агентов. При этом с вероятностью  $\gamma_i(s_i \rightarrow -s_i; \sigma_i)$  он свою стратегию поменяет на противоположную. Здесь  $\sigma_i = \sum_{j=1}^N J_{ij}s_j$  - это взвешенное среднее стратегий окружающих его агентов. Матрица  $J_{ij}$  описывает влияние агентов друг на друга. При этом активность  $\lambda_i(t)$  рассматриваемого нами агента также изменяется с течением времени. Она имеет следующий характерный вид

$$\lambda_i(t) = \tilde{\lambda}_i + \mu_i \sum_{\tau_k} e^{-b_i(t-\tau_k)}, \quad (1)$$

где  $\tau_k$  - это те моменты времени, когда у кого то из его соседей происходит изменение стратегии на противоположную. Иными словами, активность агента скачком на  $\mu_i$  возрастает при изменениях вокруг него и экспоненциально падает за характерное время  $b_i^{-1}$  к некоторому базовому уровню  $\tilde{\lambda}_i$  в случае, когда ничего вокруг не происходит. В общем случае введем матрицу  $K_{ij}$ ,  $i, j$ -элемент которой равен скачку активности  $i$ -го агента при изменении стратегии  $j$ -м агентом. В частности, в описанном нами случае  $K_{ij} = \mu_i G_{ij}$ , где  $G_{ij}$  - матрица смежности графа.

В итоге, описанная нами динамическая игра задается следующим набором параметров. Каждый агент характеризуется базовым уровнем активности  $\tilde{\lambda}_i$ , характерным временем успокоения  $b_i^{-1}$ , и вероятностями смены мнения  $\gamma_i(s \rightarrow -s|\sigma)$ . Взаимодействие между агентами задётся матрицами влияния  $J_{ij}$  и возбуждения  $K_{ij}$ . Давайте получим теперь основное кинетическое уравнение на плотность вероятности  $\mathcal{P}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}; t)$  того, что конфигурация стратегий равна  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)$ , а активности агентов находятся в окрестности  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ .

## Основное кинетическое уравнение

Для получения основного кинетического уравнения воспользуемся стандартным подходом и просуммируем все возможности для получения к моменту времени  $t + \delta t$  конфигурации  $\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}; t + \delta t) = & \delta t \sum_{i=1}^N (\lambda_i - K_{ii}) \gamma_i(-s_i \rightarrow s_i; \sigma_i - 2J_{ii}s_i) \mathcal{P}(\mathbf{s}^i, \boldsymbol{\lambda}^i; t) + \\ & + \left( 1 - \delta t \sum_{i=1}^N \lambda_i \gamma_i(s_i \rightarrow -s_i; \sigma_i) \right) \mathcal{P}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}'\delta t; t) \prod_{i=1}^N (1 + b_i\delta t). \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь были введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^i &= (s_1, \dots, -s_i, \dots, s_N), & \boldsymbol{\lambda}^i &= (\lambda_1 - K_{1i}, \dots, \lambda_N - K_{Ni}), \\ \boldsymbol{\lambda}' &= (b_1(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1), \dots, b_N(\lambda_N - \tilde{\lambda}_N)). \end{aligned}$$

Собирая все линейные по  $\delta t$  вклады получим в результате

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}; t)}{\partial t} &= \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left( (\lambda_i - \tilde{\lambda}_i) \mathcal{P}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}; t) \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^N \left( (\lambda_i - K_{ii}) \gamma_i (-s_i \rightarrow s_i; \sigma_i - 2J_{ii}s_i) \mathcal{P}(\mathbf{s}^i, \boldsymbol{\lambda}^i; t) - \lambda_i \gamma_i (s_i \rightarrow -s_i; \sigma_i) \mathcal{P}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}; t) \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Данное уравнение совершенно общее и полностью описывают динамику системы. Рассмотрим теперь случай полного графа, который может быть детально проанализирован.

## Динамика системы на полном графе

Упростим полученное выше кинетическое уравнение в случае, когда группа агентов тесно связана и все агенты влияют на стратегии всех агентов. Сделаем это в два этапа. На первом случае рассмотрим ситуацию, при которой все элементы матрицы возбуждения равны между собой  $K_{ij} = \mu$ , все базовые уровни активности совпадают  $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\Lambda}$  и все  $b_i = b$ . Это означает, что в любой момент времени активности всех агентов одинаковы и при изменениях стратегии агентами система возбуждается однородно. В этом случае можно показать, что плотность вероятности  $\mathcal{P}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}; t)$  может быть представлена в виде

$$\mathcal{P}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}; t) = \int_0^\infty d\Lambda \mathcal{P}_h(\mathbf{s}, \Lambda; t) \prod_{k=1}^N \delta(\Lambda - \lambda_k), \quad (4)$$

где  $\mathcal{P}_h(\mathbf{s}, \Lambda; t)$  – это плотность вероятности найти систему в некотором состоянии  $\mathbf{s}$  и с активностью у всех агентов находящейся в окрестности точки  $\Lambda$ . Она удовлетворяет следующему уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}_h(\mathbf{s}, \Lambda; t)}{\partial t} &= b \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left( (\Lambda - \tilde{\Lambda}) \mathcal{P}_h(\mathbf{s}, \Lambda; t) \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^N \left( (\Lambda - \mu) \gamma_i (-s_i \rightarrow s_i; \sigma_i - 2J_{ii}s_i) \mathcal{P}_h(\mathbf{s}^i, \Lambda; t) - \Lambda \gamma_i (s_i \rightarrow -s_i; \sigma_i) \mathcal{P}_h(\mathbf{s}, \Lambda; t) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Если же предположить, что все агенты одинаковы ( $\gamma_i = \gamma$ ,  $J_{ij} = 1/N$ ), то данное уравнение можно еще упростить. В этом случае состояние системы характеризуется лишь средней стратегией  $m = 1/N \sum_{i=1}^N s_i$ . Плотность вероятности  $P(m, \Lambda; t)$  найти систему в этом состоянии с активностью находящейся в окрестности точки  $\Lambda$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(m, \Lambda; t)}{\partial t} &= b \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left( (\Lambda - \tilde{\Lambda}) P(m, \Lambda; t) \right) + \\ &+ N(\Lambda - \mu) \left( \frac{1+m}{2} + \frac{1}{N} \right) \gamma \left( 1 \rightarrow -1; m + \frac{2}{N} \right) P \left( m + \frac{2}{N}, \Lambda - \mu; t \right) + \\ &+ N(\Lambda - \mu) \left( \frac{1-m}{2} + \frac{1}{N} \right) \gamma \left( -1 \rightarrow 1; m - \frac{2}{N} \right) P \left( m - \frac{2}{N}, \Lambda - \mu; t \right) - \\ &- N\Lambda \left( \frac{1+m}{2} \gamma (1 \rightarrow -1; m) + \frac{1-m}{2} \gamma (-1 \rightarrow 1; m) \right) P(m, \Lambda; t). \end{aligned} \quad (6)$$

Данное уравнение описывает поведение однородной системы агентов на полном графе и ему может быть дана интересная интерпретация в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$ ,  $\mu \rightarrow 0$ ,  $\mu N = \xi = const$ . В этом случае уравнение эволюции эквивалентно следующей системе уравнений на характеристики  $m_c(t)$  и  $\Lambda_c(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{m}_c(t) = -2\Lambda_c(t) \left( \frac{1+m_c(t)}{2} \gamma(1 \rightarrow -1; m_c(t)) - \frac{1-m_c(t)}{2} \gamma(-1 \rightarrow 1; m_c(t)) \right) \\ \dot{\Lambda}_c(t) = \xi \Lambda_c(t) \left( \frac{1+m_c(t)}{2} \gamma(1 \rightarrow -1; m_c(t)) + \frac{1-m_c(t)}{2} \gamma(-1 \rightarrow 1; m_c(t)) \right) - b(\Lambda_c(t) - \tilde{\Lambda}) \end{cases} \quad (7)$$

В зависимости от вида функции  $\gamma(s \rightarrow -s; \sigma)$  поведение системы агентов в целом может быть различным. В частности, в ней может присутствовать несколько локальных (мета)стабильных состояний, определяемых из условия

$$(1 + m_{eq})\gamma(1 \rightarrow -1; m_{eq}) = (1 - m_{eq})\gamma(-1 \rightarrow 1; m_{eq}), \quad (8)$$

а кроме того ряд интересных нестационарных явлений, связанных с медленным или, наоборот, лавинообразным переходом между такими (мета)стабильными состояниями. Подробное обсуждение всех этих вопросов можно найти в работе авторов [1].

### *Литература*

- [1] Antonov A., Leonidov A., Semenov A. Self-excited Ising game // Physica A. 2021. Vol. 561. P. 125305.
- [2] Blume L., Durlauf S. Equilibrium concepts for social interaction models // International Game Theory Review. 2003. Vol. 5. P. 193–209.
- [3] Bouchaud J.P. Crises and collective socio-economic phenomena: simple models and challenges // Journal of Statistical Physics. 2013. Vol. 151. P. 567–606.
- [4] Hawkes A.G. Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes // Biometrika. 1971. Vol. 58. P. 83–90.

### *Сведения об авторах*

**А. П. Антонов**, аспирант, antonov@lpi.ru.

**А. В. Леонидов**, д.ф.-м.н., в.н.с., leonidov@lpi.ru.

**А. Г. Семенов**, к.ф.-м.н., ст.н.с., semenov@lpi.ru.

УДК 519.83  
 ББК 22.183.2  
 В-19

## Обучение с подкреплением агентов повторяющихся социальных дилемм

Е.Е. Васильева<sup>1,2</sup>, А.В. Леонидов<sup>1,2</sup>, А.С. Титов<sup>1,2</sup>  
<sup>1</sup>МФТИ, Долгопрудный  
<sup>2</sup>ФИАН, Москва

***Аннотация.** Данная работа посвящена изучению поведения агентов игры матричной социальной дилеммы при обучении алгоритмами машинного обучения с подкреплением. В ходе работы рассмотрены алгоритмы, основанные на значениях, такие, как Q-Learning и SARSA, применяемые к основным классам социальных дилемм. Получена сходимость политик игроков к равновесию по Нэшу. Выявлена ловушка алгоритма Q-Learning. Найдена зависимость скорости роста Q-функции от значений матрицы выплат, а также зависимость результата обучения от размера характерных промежутков в матрице выплат.*

## Reinforcement learning of iterative social dilemma agents

E.E. Vasilyeva<sup>1,2</sup>, A.V. Leonidov<sup>1,2</sup>, A.S. Titov<sup>1,2</sup>  
<sup>1</sup>MIPT, Dolgoprudny  
<sup>2</sup>LPI, Moscow

Было рассмотрено два алгоритма обучения с подкреплением, основанных на значении: Q-Learning и SARSA [1], которые были применены к обучению агентов повторяющейся матричной социальной дилеммы [2], [3]. Рассмотрены основные классы социальных дилемм: дилемма заключённых, дилемма "Охота на оленя" и дилемма цыплёнка. Два RL-агента обучаются игре в некоторую повторяющуюся социальную дилемму, состоящую из  $n$  последовательных шагов  $s_k \forall k \in \{1..n\}$ , друг против друга. У игроков есть набор из двух действий: coop или defect. Были подобраны параметры обучения и получена сходимость по времени к игровому равновесию по Нэшу.

При обучении алгоритмом Q-Learning дилеммы заключённых выявлена ловушка, в которую агенты обучения попадают с некоторой вероятностью. Игрок попадает в ловушку в ситуации, когда  $Q[s_{k+1}, defect]$  всегда больше  $Q[s_{k+1}, coop]$ , из-за чего  $Q_i[s_k, coop]$  растёт даже при полученной награде  $r = 0$ . Пример такого поведения Q-функции в зависимости от времени обучения приведён на рисунке 1 у игрока 1.

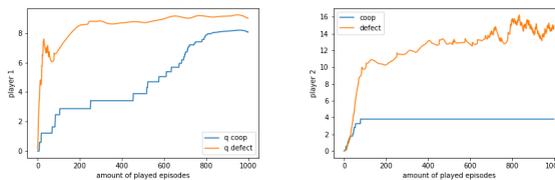


Рис. 1: Q-значения игроков на шаге с ловушкой

Получено, что агенты всегда сходятся к чистому равновесию, даже если для дилеммы существует смешанное равновесие. Также получено, что игроки дилемм, обучающиеся алгоритмами Q-Learning и SARSA, сходятся к одним и тем же равновесиям.

Была рассмотрена зависимость результата обучения политик агентов социальной дилеммы от значений в матрице выплат. Обозначим матрицу выплат социальной дилеммы как:

	$D$	$C$
$D$	$r_{dd}$	$r_{dc}$
$C$	$r_{cd}$	$r_{cc}$

Тогда в любой дилемме имеется 3 различных промежутка между выплатами. Назовём такие промежутки *характерными промежутками*. В частности, для дилеммы заключённых это  $(r_{dd} - r_{cd})$ ,  $(r_{cc} - r_{dd})$  и  $(r_{dc} - r_{cc})$ . Выявлена зависимость результата обучения от характерных промежутков. То есть, если для дилеммы есть несколько равновесий, то вероятность, с которой агенты сойдутся к одному из них, зависит от матрицы выплат и характерных промежутков в ней. Запустим обучение многократно и посмотрим на долю несмешанных исходов обучения на первом шаге (красной линией выделены смешанные исходы), результат показан на рисунках 2, 3, 4.

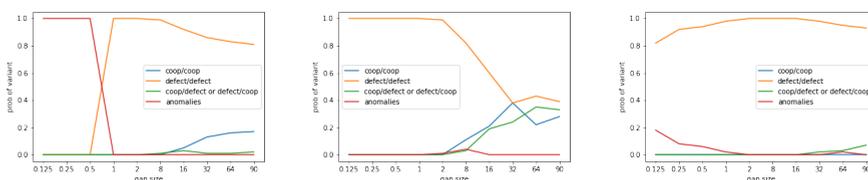


Рис. 2: Дилемма заключённых. Слева направо предоставлены графики зависимости доли исхода обучения от характерных промежутков  $(r_{dd} - r_{cd})$ ,  $(r_{cc} - r_{dd})$  и  $(r_{dc} - r_{cc})$  соответственно.

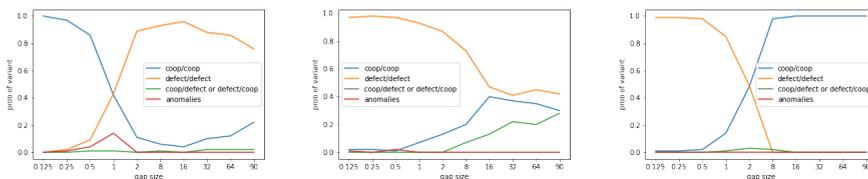


Рис. 3: Дилемма "Охота на оленя". Слева направо предоставлены графики зависимости доли исхода обучения от характерных промежутков  $(r_{dd} - r_{cd})$ ,  $(r_{dc} - r_{dd})$  и  $(r_{cc} - r_{dc})$  соответственно.

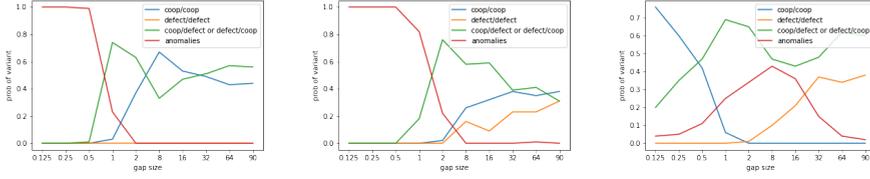


Рис. 4: Дилемма Цыплёнка. Слева направо предоставлены графики зависимости доли исхода обучения от характерных промежутков  $(r_{cd} - r_{dd})$ ,  $(r_{cc} - r_{cd})$  и  $(r_{dc} - r_{cc})$  соответственно.

Была выявлена аналитическая зависимость значения

$$\mathbb{E}_{\pi_2} \Delta Q[s, defect] - \mathbb{E}_{\pi_2} \Delta Q[s, coop],$$

которое показывает, насколько Q-значение одного действия растёт быстрее Q-значения второго действия, от размера характерного промежутка. Это показывается в следующих утверждениях.

**Утверждение 1.** Математическое ожидание скорости роста Q-значений при обучении игроков матричной социальной дилеммы алгоритмом Q-Learning прямопропорционально зависит от значений матрицы выплат.

**Утверждение 2.** Результат обучения игроков матричной социальной дилеммы алгоритмом обучения Q-Learning зависит от значений характерных промежутков в матрице выплат.

В ходе доказательства была получена формула (1), которая показывает прямую зависимость результата от первого и третьего характерных промежутков.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\pi_2} \Delta Q[s, defect] - \mathbb{E}_{\pi_2} \Delta Q[s, coop] = \\ & = \alpha(Q_t[s, coop] - Q_t[s, defect]) + \alpha(p_{2d}(r_{dd} - r_{cd}) + p_{2c}(r_{dc} - r_{cc})) \end{aligned} \quad (1)$$

Аналогичные утверждения верны и для алгоритма SARSA. Необходимо дополнительное исследование поведения обучения от среднего характерного промежутка, так как от него нет прямой зависимости.

Таким образом, было изучено поведение агентов повторяющейся социальной дилеммы при обучении алгоритмами машинного обучения с подкреплением Q-Learning и SARSA, а также исследована зависимость этого поведения в зависимости от матрицы выплат дилеммы.

### Литература

- [1] Sutton R.S., Barto A.G. Reinforcement Learning: An Introduction. L.: The MIT Press, 1998. 332 p.
- [2] Macy M.W., Flache A. Learning dynamics in social dilemmas. N.Y.: Springer, 2002.
- [3] Leibo J.Z., Zambaldi V., Lanctot M., Marecki J., Graepel T. Multi-agent Reinforcement Learning in Sequential Social Dilemmas. 2017.

- [4] Kies M. Finding Best Answers for the Iterated Prisoner's Dilemma Using Improved Q-Learning. 2020. 177 p.
- [5] Hart S., Mas-Colell A. A Reinforcement Procedure Leading to Correlated Equilibrium // Economics Essays. P. 181-200.
- [6] Goeree J.K., Holt C.A., Palfrey T.R. Stochastic Game Theory for Social Science: a Primer on Quantal Response Equilibrium. 2018.

*Сведения об авторах*

**Е.Е. Васильева**, Кандидат физ.-мат. наук, высококвалифицированный научный сотрудник, serebryannikovaee@lebedev.ru.

**А.В. Леонидов**, Доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, leonidovav@lebedev.ru.

**А.С. Титов**, Бакалавр, инженер, titov.aleksei@phystech.edu.

УДК 519.857

ББК 22.186

В 19

**Стратегическое охлаждение / связывание в бинарной игре  
Изинга на полном графе**

Е. Е. Васильева<sup>1,2</sup>, А. В. Леонидов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>ФИАН им. П.Н. Лебедева, г. Москва

<sup>2</sup>МФТИ, г. Долгопрудный

***Аннотация.** Анализируется динамическая игра с зашумленным бинарным выбором (игра Изинга) стратегических агентов на полном графе. Показано, что учет стратегических соображений приводит к эффективному усилению взаимодействия (снижению шума) по сравнению с игрой близоруких агентов. На основе явного решения уравнения Беллмана показано, что стратегические агенты способны прийти к консенсусу в более широком диапазоне значений шума, чем близорукие. Описана эффективная популяционная динамика с зависящими от времени вероятностями, отражающая эффект стратегического связывания/охлаждения.*

**Strategic stiffening/cooling in the Ising game on complete graph**

Е. Е. Vasilyeva<sup>1,2</sup>, А. В. Leonidov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>LPI, Moscow

<sup>2</sup>MIPT, Dolgoprudny

Социально-экономическое взаимодействие считается одним из ключевых факторов, объясняющих сложность наблюдаемых социально-экономических систем и их эволюции. Именно поэтому разработка методов его количественного описания имеет важное значение [2]. В частности, эффекты, возникающие в результате взаимодействия агентов, изучаются в рамках зашумленных игр многих агентов с дискретным выбором [4, 7, 1]. Для формулировки зашумленной игры с дискретным выбором необходимо описать пространство стратегий игроков (бинарные, троичные и т. д.), распределение шума и топологию графа взаимодействий. Наибольшее внимание в литературе уделяется случаю бинарного выбора [4, 1, 9, 10?, 11]. При этом, при описании распределения шума распределением Гумбеля могут быть проведены глубокие параллели со статистической физикой магнетиков [5, 6, 3].

Ясно, однако, что описанная выше эквивалентность физических моделей и моделей социально-экономических систем не может быть универсальной. Одним из аспектов, которые потенциально могут отличать спины в магнетике от агентов социально-экономических систем, является то, что последние, в общем случае, являются дальновидными. Иными словами, их решение может быть основано не только на текущем состоянии системы или ее истории, но также может зависеть от их прогноза возможного развития системы в будущем. Этот аспект принятия решений человеком лежит в основе анализа повторяющихся игр в теории игр [8]. Однако, насколько известно авторам, эффекты стратегического принятия решений ранее не изучались в литературе, посвященной зашумленным играм с дискретным выбором.

В настоящем докладе будет описан феномен эффективного усиления взаимодействия/уменьшения шума ввиду учета стратегического мышления агентов в игре Изинга с бинарным выбором. Отсюда прямо следует, что дальновидные агенты способны приходить к консенсусу в более широком диапазоне значений шума, чем близорукие.

Динамическая игра Изинга изучаемая в настоящем докладе формулируется следующим образом. Рассматривается взаимодействие  $N$  игроков, находящихся в узлах графа, описываемого матрицей связности  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$ . Пространство состояний каждого игрока  $i$ ,  $i = 1, \dots, N$  описывается двумя возможными стратегиями  $s_i = \pm 1$ . Игра развивается в дискретном времени  $t = 1, \dots, T$ . В каждый момент времени полное описание системы задается конфигурацией стратегий всех игроков  $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t))$ . Начальное состояние системы описывается некоторой конфигурацией  $\mathbf{s}(0)$ . Система эволюционирует в результате пересмотра стратегий агентами  $s_i(t-1) \rightarrow s_i(t)$ , при этом в каждый момент времени только одному случайно выбранному агенту выпадает шанс пересмотреть свою стратегию.

Определим игру близоруких агентов. В игре близоруких агентов на полном графе процесс пересмотра стратегии игроком  $i$  основывается на оценке величины полезности/выплаты  $U_i^{\text{mp}}(s_i, \mathbf{s}_{-i}(t), \varepsilon_{s_i}(t))$  от выбора стратегии  $s_i$  следующего вида

$$U_i^{\text{mp}}(s_i, \mathbf{s}_{-i}(t), \varepsilon_{s_i}(t)) = J \left( \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} s_j(t) \right) s_i + \varepsilon_{s_i}(t), \quad (1)$$

где константа  $J > 0$  определяет силу взаимодействия (связывания) агентов,  $\mathbf{s}_{-i}(t) = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_N)$  – вектор стратегий всех игроков, кроме игрока  $i$ ,  $\varepsilon_{s_i}(t)$  – зависящая от выбранной игроком  $i$  стратегии величина шума (случайного вклада). В текущем докладе будут представлены результаты для случая, когда шум описывается нормальным распределением с параметрами  $\mathcal{N}(0, \sigma \equiv 1/\beta)$ .

Введем обозначение для информационного множества агента  $i$  в момент времени  $t$ :

$$\Phi_i(t) = (\mathbb{I}_i(t), s_i(t-1), m_{-i}(t), \varepsilon_{\pm 1}^i(t)), \quad (2)$$

где  $\mathbb{I}_i(t)$  – функция-индикатор равная 1, если агенту  $i$  выпал шанс пересмотреть стратегию, и 0 иначе,  $m_{-i}(t) = 1/N \sum_{j \neq i} s_j$ .

$$U_i^{\text{mp}}(s_i, \Phi_i(t)) \equiv \begin{cases} U_i^{\text{mp}}(s_i, m_{-i}(t), \varepsilon_{s_i}(t)), & s_i = \pm 1, \text{ if } \mathbb{I}_i(t) = 1 \\ U_i^{\text{mp}}(s_i(t-1), m_{-i}(t), \varepsilon_{s_i(t-1)}(t)), & \text{if } \mathbb{I}_i(t) = 0 \end{cases}$$

Действия стратегического игрока основываются не только на величине его текущего выигрыша/полезности, но и на его ожиданиях относительно будущих выигрышей. Поэтому мы предполагаем, что процесс пересмотра стратегии стратегическим игроком  $i$  основывается на оценке величины полезности/выплаты  $U_i(s_i, \Phi_i(t))$  от выбора стратегии  $s_i$  следующего вида:

$$U_i(s_i, \Phi_i(t)) = U_i^{\text{mp}}(s_i, \Phi_i(t)) + \gamma U_i^{\text{st}}(s_i, \Phi_i(t)). \quad (3)$$

При этом стратегический вклад  $U_i^{\text{st}}(s_i, \Phi_i(t))$  в полезность имеет следующий вид:

$$U_i^{\text{st}}(s_i, \Phi_i(t)) = \mathbb{E} \left( \sum_{\tau=t+1}^T \gamma^{\tau-t-1} U_i^{\text{mp}}(s_i(\tau), \Phi_i(\tau)) | s_i(t) = s_i, \Phi_i(t) \right) \quad (4)$$

Стратегия (выбор) агента  $i$  в момент времени  $t$  определяется следующим соотношением

$$s_i(t) = \begin{cases} \arg \max_{s'_i} U_i(s'_i, \Phi_i(t)) & \mathbb{I}_i(t) = 1 \\ s_i(t-1) & \mathbb{I}_i(t) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Для случая полного графа предложен способ явного точного вычисления оптимальных траекторий решений агентов посредством решения соответствующего уравнения Беллмана.

На полном графе компактное представление усредненной эволюции системы может быть дано в терминах набора вероятностей  $\{p_{s_i}(m_{-i}, t)\}$  того, что игрок  $i$  выберет стратегию  $s_i$  при заданной величине  $m_{-i}$ .

Для случая близких агентов данные вероятности имеют вид

$$p_+^{\text{mp}}(m, t) \equiv p_{s=1}^{\text{mp}}(m, t) = \frac{1}{2} (1 + \text{erf}[\beta J m]) \quad (6)$$

Для стратегической игры показано, что при  $\gamma < 0.85$  аналогичные вероятности хорошо описываются следующим соотношением

$$p_+(m, t) \equiv p_{s=1}(m, t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \text{erf} \left[ \beta \left( J + \gamma \frac{c(t)}{2} \right) m \right] \right) \quad (7)$$

где  $c(t)$  – некоторый зависящий от времени положительный коэффициент.

Таким образом, стратегическое принятие решения приводит к введению следующей модификации

$$(\beta J)_{\text{eff}} = \beta J \left( 1 + \gamma \frac{c(t)}{2J} \right) \quad (8)$$

Такая модификация может интерпретироваться как одно из следующих альтернативных явлений:

- стратегическое связывание, приводящее к увеличению константы связывания  $J \rightarrow J \left(1 + \frac{\gamma c(t)}{2J}\right)$ ;
- стратегическое охлаждение, приводящее к снижению шума  $\beta \rightarrow \beta \left(1 + \frac{\gamma c(t)}{2J}\right)$ .

Результаты оценки  $p_+(m_{-i}, t)$  и  $(\beta J)_{\text{eff}}$  при фиксированных значениях параметров модели приведены на Рис.1 и 2 соответственно.

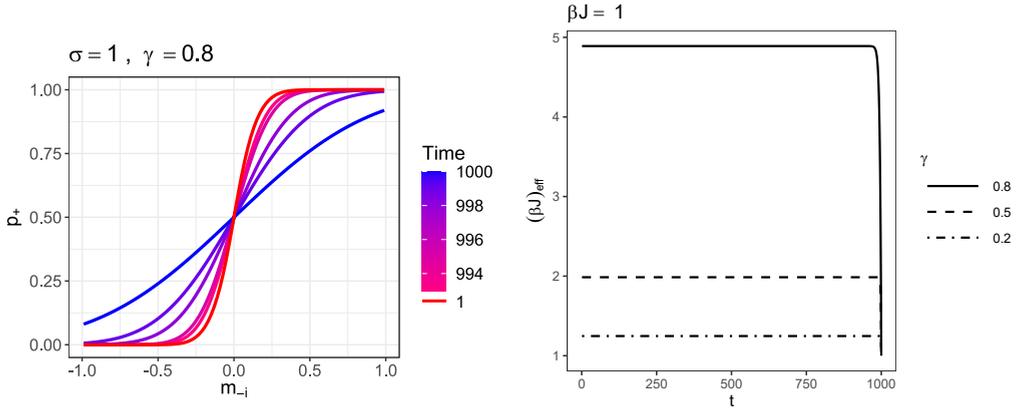


Рис. 1: Эволюция вероятности  $p_+(m_{-i}, t)$  Рис. 2: Эволюция  $(\beta J)_{\text{eff}}$  при различных значениях параметра  $\gamma$

### Литература

- [1] Blume L., Durlauf S. Equilibrium concepts for social interaction models // International Game Theory Review. 2003. Vol. 5(03). P. 193-209.
- [2] Blume L., Durlauf S. The interactions-based approach to socioeconomic behavior // Social dynamics. 2001. P. 15-44.
- [3] Bouchaud J.P. Crises and collective socio-economic phenomena: simple models and challenges // Journal of Statistical Physics. 2013. Vol. 151 (3-4). P. 567-606.
- [4] Brock W.A., Durlauf S.N. Discrete choice with social interactions // The Review of Economic Studies. 2001. Vol. 68 (2). P. 235-260.
- [5] Durlauf S.N. How can statistical mechanics contribute to social science? // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1999. Vol. 96 (19). P. 10582-10584.
- [6] Durlauf S.N. Statistical mechanics approaches to socioeconomic behavior // The Economy As An Evolving Complex System II. 2018. P. 81-104.
- [7] Durlauf S.N., Ioannides Y.M. Social interactions // Annual Review of Economics. 2010. Vol. 2 (1). P. 451-478.
- [8] Fudenberg D., Tirole J. Game theory. Cambridge: MIT press, 1991. 608 p.

- [9] Ioannides Y.M. Topologies of social interactions // Economic Theory. 2006. Vol. 28 (3). P. 559-584.
- [10] Leonidov A., Savvateev A., Semenov A. Quantal response Equilibria in Binary Choice Games on Graphs. 2019. URL: <https://arxiv.org/pdf/1912.09584.pdf>.
- [11] Leonidov A., Savvateev A., Sevenov A. Ising Game on Graphs. 2021. URL: <https://arxiv.org/pdf/2108.00824.pdf>.

*Сведения об авторах*

**Е. Е. Васильева**, к.ф.-м.н., научный сотрудник ФИАН им. П.Н. Лебедева, [serebryannikovae@lebedev.ru](mailto:serebryannikovae@lebedev.ru).

**А. В. Леонидов**, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник ФИАН им. П.Н. Лебедева, [leonidovav@lebedev.ru](mailto:leonidovav@lebedev.ru).

## Секционные доклады. Теория графов и дискретная геометрия

УДК 519.171  
ББК 22.174.2  
Ч-48

### О минимальной сумме весов ребер в знаковом реберно-доминированном графе

Д. Д. Черкашин

Институт математики и информатики, София

***Аннотация.** В работе улучшены ранее известные верхние и нижние оценки для минимальной суммы весов ребер в графе, где вес каждого ребра равен 1 или  $-1$ , а сумма весов каждого ребра и всех смежных с ним ребер положительна. Доказано, что для любого графа с  $n$  вершинами эта сумма не меньше  $-\frac{n^2}{25}$  и построена бесконечная серия графов, для которых эта сумма принимает значения, строго меньшие  $-\frac{n^2}{8(1+\sqrt{2})^2} + 4n$ .*

### On the minimal sum of edges in a signed edge-dominated graph

DD. Cherkashin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institute of Mathematics and Informatics, Sofia

Назовем (конечным, простым, неориентированным) графом пару  $(V, E)$ , где  $V$  обозначает множество вершин, а  $E$  — множество неупорядоченных пар вершин; элементы  $E$  называются ребрами. Пусть  $G$  — граф; для данного ребра  $e = (u, v)$  определим его *замкнутую окрестность* как подмножество ребер  $N[e]$ , состоящее из  $e$

и всех ребер  $G$ , имеющих с  $e$  общую вершину. Функция весов  $f : E \rightarrow \{+1; -1\}$  называется *знаково реберно-доминированной функцией*  $G$ , если

$$\sum_{e' \in N[e]} f(e') \geq 1$$

для любого  $e \in E$ ; в этом случае  $(G, f)$  называется *SED-парой* порядка  $|V|$ . Пусть  $s[(G, f)]$  означает сумму всех весов на ребрах графа  $G$ , снабженного функцией  $f$ .

Обозначим за  $E_+$  множество  $\{(u, v) \in E \mid f(u, v) = 1\}$  и за  $E_-$  множество  $\{(u, v) \in E \mid f(u, v) = -1\}$ . Обозначим

$$s_v = \sum_{e \in N(v)} f(e);$$

для каждого  $v \in V$ , где  $N(v)$  обозначает множество вершин, содержащих  $v$ . Положим

$$V_+ = \{v \in V \mid s_v > 0\}, \quad V_- = \{v \in V \mid s_v < 0\}, \quad V_0 = \{v \in V \mid s_v = 0\}.$$

Следующая задача была поставлена Сюй [3, 4].

**Задача 1.** *Найти*

$$g(n) := \min\{s[(G, f)] \mid (G, f) \text{ — SED-пара порядка } n\}$$

для каждого натурального  $n$ ?

Заметим, что  $g(n) \leq 0$ , поскольку пустой граф  $G$  является SED-парой (а функцию  $f$  определять не на чем). Единственным известным результатом является следующая теорема.

**Теорема 1** (Акбари – Bolouki – Hatami – Siami [1]). *(i) Для каждого натурального  $n$  выполняется*

$$g(n) \geq -\frac{n^2}{16}.$$

*(ii) Существует последовательность SED-пар порядка  $n$ , удовлетворяющая*<sup>1</sup>

$$s[G, f] \leq -(1 + o(1))\frac{n^2}{54}.$$

Мы улучшаем [2] оба пункта Теоремы 1.

**Теорема 2** (Cherkashin – Prozorov [2]). *(i) Для каждого натурального  $n$  выполняется*

$$g(n) \geq -\frac{n^2}{25}.$$

*(ii) Для каждого натурального  $n$  найдется SED-пара порядка  $n$  удовлетворяющая*

$$s[G, f] < -(1 + o(1))\frac{n^2}{8(1 + \sqrt{2})^2}.$$

Более того, если  $n = 4(p + q)p$ , где  $p > 1$  и  $q > 1$  удовлетворяют  $p^2 = 2q^2 - 1$ , то

$$s[G, f] = \left[ -\frac{n^2}{8(1 + \sqrt{2})^2} + \frac{3\sqrt{2} - 4}{4}n \right].$$

<sup>1</sup> Авторы доказывают оценку  $-\frac{n^2}{72}$ , но приведенный пример реализует оценку  $-(1 + o(1))\frac{n^2}{54}$ .

Заметим, что найдется бесконечно много  $p$  и  $q$ , удовлетворяющих условию  $p^2 = 2q^2 - 1$ , поскольку это специальный случай уравнения Пелля; хорошо известно, что положительными решениями являются

$$p = \frac{\sqrt{2}-1}{2}(3+2\sqrt{2})^k - \frac{1+\sqrt{2}}{2}(3-2\sqrt{2})^k, q = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^k + \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^k,$$

Мы покажем, что константа в Теореме 1(ii) оптимальна при некоторых дополнительных предположениях.

**Теорема 3.** Пусть  $(G, f)$  является SED-парой порядка  $n$ . Предположим, что каждое  $e \in E_-$  соединяет вершину из  $V_+$  с вершиной из  $V_-$ ; и каждое ребро  $e \in E_+$  соединяет вершины из  $V_+ \cup V_0$ . Тогда

$$s[(G, f)] \geq -\frac{1}{54}n^2.$$

**Теорема 4.** Пусть  $(G, f)$  является SED-парой порядка  $n$ . Предположим что каждое  $e \in E_+$  соединяет вершины из  $V_+ \cup V_0$ . Тогда

$$s[G, f] \geq -\frac{1}{8(1+\sqrt{2})^2}n^2$$

### Литература

- [1] Saeed Akbari, Sadegh Bolouki, Pooya Hatami, and Milad Siami. On the signed edge domination number of graphs. *Discrete mathematics*, 309(3):587–594, 2009.
- [2] Danila Cherkashin and Pavel Prozorov. On the minimal sum of edges in a signed edge-dominated graph. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 29(3):P3.38, 2022.
- [3] Baogen Xu. On signed edge domination numbers of graphs. *Discrete Mathematics*, 239(1-3):179–189, 2001.
- [4] Baogen Xu. On edge domination numbers of graphs. *Discrete Mathematics*, 294(3):311–316, 2005.

Сведения об авторах

Д. Д. Черкашин, к. ф.-м. н., научный сотрудник, jiocb.orlangyr@gmail.com.

## On ergodicity of a 1–dimensional PCA with parity-dependent update rules

Dhruv Bhasin

Indian Institute of Science Education and Research (IISER) Pune

In this paper, we study a generalized version of a 1–dimensional probabilistic cellular automata (GPCA). This GPCA is intriguing in the sense that its cells get updated by rules which are dependent on the parity of the index of the cell. For reals  $0 \leq p, q \leq 1$ , this GPCA,  $E_{p,q}$  has alphabet  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ . For a configuration  $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ,  $E_{p,q}\eta(2n - 1)$  and  $E_{p,q}\eta(2n)$ , both follow Bernoulli( $1 - p$ ) if  $\eta(2n) = 0 = \eta(2n + 1)$  whereas, otherwise, they follow Bernoulli( $q$ ). All the cells get updated independent of each other

We relate this GPCA to a percolation game in which the set of points to which a player can move depend on the parity of the  $x$ –coordinate of the current point. Using this connection, we find some lower bounds on  $p$  and  $q$ , beyond which the GPCA is ergodic. To prove this, we use the relatively recently introduced technique of proving the ergodicity of PCAs namely, that of, *weight functions*.

### *Литература*

- [1] Holroyd A.E., Marcovici I., Martin J.B. Percolation games, probabilistic cellular automata, and the hard-core model // Probability Theory and Related Fields. 2019. Vol. 174 (3). P. 1187–1217.

### *Authors*

**D. Bhasin**, PhD student, Indian Institute of Science Education and Research (IISER) Pune, bhasin.dhruv@students.iiserpune.ac.in.

## A special case of the Borsuk problem for vertices of a 10-dimensional hypercube

Igor Batmanov

Moscow Institute of Physics and Technology

We researched a special case of the Borsuk’s conjecture in this paper. Some earlier introduced counterexamples for the general hypothesis were based on selection of subset of vertexes of  $n$  dimensional cube. Natural question is following: What is maximum  $n$  such that every subset of such type can be divided into  $n + 1$  parts of lower diameter. In Ziegler’s paper and in Goldstein’s PhD thesis were introduced that the statement is true for  $n \leq 9$  [1, 2]. We proved absence of counterexample of such type in 10 dimensional space.

*Литература*

- [1] Ziegler G.M. Coloring Hamming graphs, optimal binary codes, and the 0/1- Borsuk problem in low dimensions // Computational Discrete Mathematics. 2001. P. 159–171. URL: [https://doi.org/10.1007/3-540-45506-X\\_12](https://doi.org/10.1007/3-540-45506-X_12).
- [2] Гольдштейн В.Б. О проблеме Борсука для  $(0, 1)$ -и  $(-1, 0, 1)$ - многогранников в пространствах малой размерности // Труды Московского физико-технического института. 2012. Т. 4, № 1. С. 91–110.

УДК 519.173  
ББК 22.174.2  
Б-60

## Проблема Борсука и радиус описанной гиперсферы

А. И. Бикеев  
МФТИ, Москва

Рассматривается классическая проблема Борсука о разбиении тела в пространстве  $\mathbb{R}^n$  на части меньшего диаметра и связанные с ней задачи о покрытии тела постоянной ширины гомотетическими копиями меньшего размера и об освещении тела минимальным числом направлений. Получены некоторые улучшения текущих оценок в частных случаях при определенных предположениях на радиус описанной сферы данного тела диаметра 1.

УДК 519.17  
ББК 22.174.2  
Б-94

## Бесконечные системы уравнений над графами

И. М. Бучинский<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Омск

<sup>2</sup>Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, г. Омск

**Аннотация.** Удобными алгебраическими системами, с точки зрения универсальной алгебраической геометрии, являются алгебраические системы, обладающие свойствами нётеровости и слабой нётеровости по уравнениям,  $q_\omega$ - и  $u_\omega$ -компактностей. В данном докладе будут представлены критерии этих свойств в категории графов.

## Infinite systems of equations over graphs

I. M. Buchinskiy<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Omsk branch of the Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk

<sup>2</sup>Dostoevsky Omsk State University, Omsk

Свойство нётеровости по уравнениям, а также его обобщения:  $q_\omega$ -компактность,  $u_\omega$ -компактность и слабая нётеровость по уравнениям, являются важными для универсальной алгебраической геометрии (см. Гл. 3 в [1]). В случае, когда алгебраическая система обладает этими свойствами, работает общий теоретический подход, позволяющий описывать решения систем уравнений со структурной и теоретико-модельной точек зрения. Данный подход представлен в [1] в виде так называемых объединяющих теорем. Нетрудно заметить, что указанными свойствами компактности по уравнениям обладают, например, локально конечные простые графы (см. Гл. 2 в [1]). Однако список «хороших», с точки зрения универсальной алгебраической геометрии, графов далеко не исчерпывается только такими графами.

В данном докладе будут представлены критерии нетеровости по уравнениям (результат получен совместно с А. В. Трейером),  $q_\omega$ -компактности,  $u_\omega$ -компактности и слабой нетеровости по уравнениям для простых графов на языке запрещенных подграфов. Важную роль в построении данных критериев играет следующая лемма, которая представляет собой критерии нетеровости по уравнениям,  $q_\omega$ -компактности и  $u_\omega$ -компактности для произвольной алгебраической системы:

**Лемма 1.** Пусть  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L} \rangle$  – некоторая алгебраическая система. Тогда справедливы следующие утверждения:

1.  $\mathcal{A}$  не является нетеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда найдутся последовательность элементов  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $A_i \in A^n$ , и последовательность уравнений  $(s_i(X))_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , языка  $\mathcal{L}$  такие, что  $\mathcal{A} \models s_i(A_i)$  для всех  $i \in \mathbb{N}$  и  $\mathcal{A} \models s_j(A_i)$  для всех  $j < i$ ;
2.  $\mathcal{A}$  не является  $q_\omega$ -компактной тогда и только тогда, когда  $\mathcal{A}$  не является нетеровой по уравнениям и, в обозначениях пункта 1, найдется такое уравнение  $f(X)$  языка  $\mathcal{L}$ , что  $\mathcal{A} \models f(A_i)$  для всех  $i \in \mathbb{N}$  и для всех таких  $a \in A^n$ , что для каждого  $i \in \mathbb{N}$   $\mathcal{A} \models s_i(a)$ , верно, что  $\mathcal{A} \models f(a)$ ;

3.  $\mathcal{A}$  не является  $u_\omega$ -компактной тогда и только тогда, когда  $\mathcal{A}$  не является нетеровой по уравнениям и, в обозначениях пункта 1, найдется такой конечный набор уравнений  $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \dots, f_k(X)\}$  языка  $\mathcal{L}$ , что  $\mathcal{A} \Vdash f(A_i)$  для всех  $f \in F$  и  $i \in \mathbb{N}$  и для всех таких  $a \in A^n$ , что для каждого  $i \in \mathbb{N}$   $\mathcal{A} \models s_i(a)$ , обязательно найдется такое уравнение  $f \in F$ , что  $\mathcal{A} \Vdash f(a)$ .

Пункт 1 леммы 1 был получен М. В. Котовым в [2].

В частности, из полученных критериев следует, что так называемый бесконечный булев граф – бесконечный граф, решетка замкнутых относительно замыкания на вершинах, определенного в [3], подмножеств которого образует булеву алгебру, не является ни нетеровым по уравнениям, ни  $q_\omega$ -компактным, ни  $u_\omega$ -компактным, ни даже слабо нетеровым по уравнениям. Конечные булевы графы ранее исследовались, например, в [4].

Используемый подход позволяет описать все классы указанных компактностей по уравнениям для категорий графов с петлями, ориентированных графов, гиперграфов и т.п. Кроме того, используя описание всех нетеровых по уравнениям простых графов, в [5] был получен отрицательный ответ на вопрос выразимости логикой первого порядка свойства нетеровости по уравнениям в языке с константами простых графов.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

### *Литература*

- [1] Даниярова Э.Ю., Мясников А.Г., Ремесленников В.Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. Новосибирск: СО РАН, 2016. 243 с.
- [2] Котов М.В. Несколько замечаний о нетеровости по уравнениям // Вестник Омского ун-та. 2013. № 2. С. 24–28.
- [3] Duncan A.J., Kazachkov I.V., Remeslennikov V.N. Orthogonal systems in finite graphs // Сибирские электронные математические известия. 2008. № 5. С. 151–176.
- [4] Бучинский И.М. Булев граф и его свойства // ФМХ ОмГУ-2021: сб. ст. IX регион. конф. магистрантов, аспирантов и молодых ученых по физике, математике и химии. Омск, 2021. С. 16–19.
- [5] Buchinskiy I.M., Treier A.V. On first order definability of equationally noetherian graphs. // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1901 (1). P. 012032.

### *Сведения об авторах*

**И. М. Бучинский**, аспирант Омского филиала Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, преподаватель кафедры компьютерной математики и программного обеспечения Омского государственного университета им. Ф. М. Достоевского, г. Омск, buchvan@mail.ru.

УДК 519.178  
ББК 22.174.2  
Ф-34

## Особенности алгоритмической и архитектурной оптимизации алгоритмов сопоставления графов на примере задачи изоморфного вхождения подграфа

И. А. Федотов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Intel, Нижний Новгород

<sup>2</sup>Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород

***Аннотация.** В работе рассматриваются возможности оптимизации (по памяти и быстрдействию) алгоритмов сопоставления графов (graph matching) которые затрагивают алгоритмические аспекты реализации и архитектурного представления данных как самих графов так и внутреннего дерева перебора. Дается обзор алгоритмических и структурных различий больших разреженных графов, больших плотных и малых нормальных. Отдельно развивается тема получения априорной информации о ветвлениях будущего дерева поиска и конечного количества биекций. Обобщаются выводы реализации промышленного алгоритма на серверных многоядерных процессорах с расширенными регистрами, иерархической памятью и кластеризацией памяти на пита ноды.*

## Algorithmic and architectural optimization specifics of graph matching algorithms on the subgraph isomorphism problem example

I. A. Fedotov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Intel, Nizhny Novgorod

<sup>2</sup>Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod

В связи с ростом накопленных данных - блокирующей становится задача скорости извлечения сложной информации из большого объема. Если раньше типовые запросы в реляционные базы данных требовали только семантического поиска со сложностью  $O(n)$  или  $O(\log(n))$ , то теперь часто проводится еще и поиск структурного соответствия, с казалось ранее немыслимой сложностью  $O(n!)$  т.е. фактически перебора всех вариаций, подобные запросы как раз формируют графовые базы данных. Алгоритмически это соответствует давно известным задачам теории графов т.к. максимальная клика, автоморфизм, изоморфизм графа, изоморфизм подграфа, максимальное изоморфное вхождение, гомеоморфизм и их разновидности. Данный набор задач в англоязычной литературе называется 'graph matching' у нас иногда называют 'сопоставлением графов'.

В работе обобщаются выводы, полученные в рамках промышленной оптимизации одного из алгоритмов изоморфного вхождения подграфа для многопроцессорной вычислительной среды и последующего развития предложенных методов для семейства алгоритмов graph matching'a. К слову именно алгоритм изоморфного вхождения подграфа имеет наибольшую степень разработанности. Исторически его путь отсчитывают от работы [1] и называют алгоритмом Ульмана. Современное состояние дел таково что сосуществует три семейства алгоритмов изоморфного вхождения:

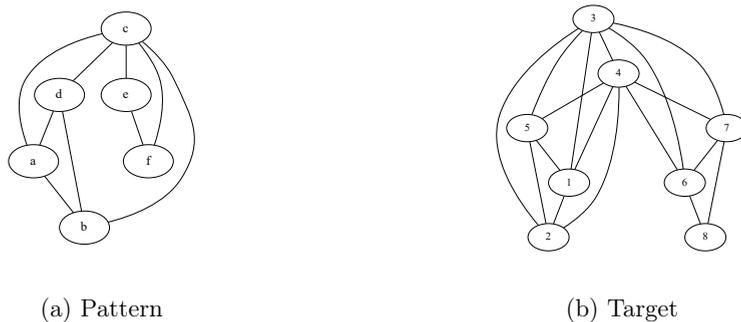


Рис. 1: Пример задачи изоморфного вхождения подграфа

- Tree search methods (Ulman’s..., VF2, RI, VF3/VF3LP, Intel SI)
- Constraint propagation (Lad, ..., Glasgow )
- Graph Indexing (поиск в сильно атрибутированных графовых базах данных)

Наиболее производительные в настоящее время алгоритмы основаны на т.н. дереве поиска, хотя наиболее алгоритмически ценным является алгоритм Glasgow, основанный на распространении ограничений.

Датасеты для сверки результатов и тестирования производительности можно найти по ссылкам к соответствующим решателям, отдельно стоит сказать что наиболее ценным являются датасеты в алгоритме RI. Там представлены и малые молекулярные графы и большие вероятностные, также богатый набор датасетов можно найти в хранилище алгоритма Glasgow, но он из-за специфики алгоритма представлен малыми и средними графами. Отдельно, большую коллекцию графов можно найти по ссылке [8]. Тестирование и отладка производилась на 1, 2х и 4х соккетных серверах с процессорами Xeon, имеющих расширенный набор регистров AVX/AVX2/AVX-512 и максимальным количеством ядер 224 на машине в режиме hyperthreading без использования GPU вычислителей.

Типовая структура tree-search алгоритмов выглядит так: **1. Загрузка** pattern и target графов -> **2. Препроцессинг** pattern графа и опционально target графа -> **3. Матчинг** процедура -> **4. Сохранение** или вывод результатов (биекций). Основное время расчетов и памяти тратится на шаге 3 (сложность шага  $\sim O(n!)$ ). Цель шага 2 - усечь дерево поиска, чтобы под факториалом стояло как можно меньшее число с минимальным коэффициентом (сложность шага  $O(m)/O(n)$ ). Принципиально алгоритмы VF2/RI/VF3/VF3LP различаются именно шагом 2, в алгоритме [7] глубоко переработан шаг 3, а в его дальнейших модификациях и шаг 2, и по сути он стал похож на подход [6], оставаясь при этом по прежнему tree-search алгоритмом. Суть шага 2 - сделать переиндексацию графа шаблона, чтобы усечь дерево поиска, так для примера рис. 1a будем иметь последовательность: c-b-a-d-e-f. Под вершиной будем подразумевать некоторый регистр большой емкости, который хранит бинарный код (натуральное число) всех её (вершины) соседей, т.е. соотв. строку бинарной

матрицы смежности.

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{a} \\
 \mathbf{b} \\
 \mathbf{c} \\
 \mathbf{d} \\
 \mathbf{e} \\
 \mathbf{f}
 \end{array}
 :
 \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{array}{c}
 28 \\
 44 \\
 55 \\
 56 \\
 9 \\
 10
 \end{array}
 ,
 \begin{array}{c}
 \mathbf{1} \\
 \mathbf{2} \\
 \mathbf{3} \\
 \mathbf{4} \\
 \mathbf{5} \\
 \mathbf{6} \\
 \mathbf{7} \\
 \mathbf{8}
 \end{array}
 :
 \begin{array}{c}
 120 \\
 184 \\
 222 \\
 238 \\
 240 \\
 51 \\
 53 \\
 6
 \end{array}$$

Граф шаблона задаёт логических образ который мы должны отыскать в целевом графе, условия консистентности (индуцированной задачи) для заданной последовательности вершин могут выглядеть следующим образом: где  $r[i]$  содержимое реги-

Таблица 1: Условия разрешимости

core level	Ptr.v	v.deg	v.label	consist.cond.	via De Morgan's law
0	<b>c</b>	$deg(l_0) \geq 5$	$lbl(l_0) = \forall$	$\forall$	$\forall$
1	<b>b</b>	$deg(l_1) \geq 3$	$lbl(l_1) = \forall$	$r[l_0]$	"
2	<b>a</b>	$deg(l_2) \geq 3$	$lbl(l_2) = \forall$	$r[l_0] \wedge r[l_1]$	"
3	<b>d</b>	$deg(l_3) \geq 3$	$lbl(l_3) = \forall$	$r[l_0] \wedge r[l_1] \wedge r[l_2]$	"
4	<b>e</b>	$deg(l_4) \geq 2$	$lbl(l_4) = \forall$	$r[l_0] \wedge r[l_1] \wedge r[l_2] \wedge r[l_3]$	$(r[l_1] \vee r[l_2] \vee r[l_3]) \wedge (r[l_0])$
5	<b>f</b>	$deg(l_5) \geq 2$	$lbl(l_5) = \forall$	$r[l_0] \wedge r[l_1] \wedge r[l_2] \wedge r[l_3] \wedge r[l_4]$	$(r[l_1] \vee r[l_2] \vee r[l_3]) \wedge (r[l_0] \wedge r[l_4])$

стра, который хранит выставленные биты подходящих вершин. Так например чтобы найти подходящие вершины для отображения вершины **c** паттерна, мы должны вычислить:  $l_0 = deg(l_0) \geq 5 \wedge \forall \wedge \forall = 48 \wedge 255 \wedge 255 = 48_d = 00110000_b = \{3, 4\}$ . Теперь пусть есть неполное соответствие вершин  $\{c, b, a, d\} \rightarrow \{3, 2, 1, 5\}$ , и нужно найти соответствие вершине **e**, тогда:  $deg(l_4) \geq 2 \wedge \forall \wedge (r[l_1] \vee r[l_2] \vee r[l_3]) \wedge (r[l_0]) = 255 \wedge 255 \wedge (r[2] \vee r[1] \vee r[5]) \wedge (r[3]) = (r[2] \vee r[1] \vee r[5]) \wedge (r[3]) = (184 \vee 120 \vee 240) \wedge (222) = 6_d = 00000110_b = \{6, 7\}$ . Соответственно теперь:  $\{c, b, a, d, e\} \rightarrow \{3, 2, 1, 5, 6/7\}$  аналогично поступаем и с вершиной **f**, таким образом находим две полных биекции (из 24-х возможных) в табл. 2 - столбцы 1 и 2.

Описанная выше процедура выливается в высокопроизводительные целочисленные вычисления (без условных переходов, что важно для полной загрузки ядра процессора) над большими регистрами (чем больше разрядность регистра - тем большее подмножество вершин может обрабатываться за такт). Такой метод объединяет два подхода (tree-search и constraint propagation), для этого в табл. 1 добавляются новые столбцы с ограничениями, только нужно следить чтобы они были быстро вычисляемые, а то повторится ситуация как с решателем [6].

Отдельно следует озаботиться хранением разворачивающего дерева поиска, основным недостатком tree-search подхода является его большое расходования памяти, из-за этого массивные графы он просто не может обрабатывать. На сегодняшний день все tree-search подходы обходят дерево поиска с помощью dfs обхода, это делается для экономии памяти, но возможен и bfs обход, для этого необходимо предварительно оценить ширину дерева поиска, и при выборе лимита памяти переключаться на консервативный dfs подход. Такая стратегия позволяет в разы повысить быстродействие алгоритма, поскольку bfs обход более прогрессивен и поддерживает многочисленные оптимизации. Большую роль играют структуры для хранения dfs/bfs деревьев, они должны быть алгоритмозависимые, т.е. проектироваться непосредственно под алгоритм решателя. Соответственно при различном выборе обхода

дерева поиска модель параллелизации кардинально меняется. При dfs обходе целесообразно использовать модель независимых задач (**Tasks**), при bfs обходе хорошо подходит **parallel\_for** модель. В дальнейших разработках целесообразно сразу использовать bfs модель вычислений, поскольку в любой момент можно переключиться на dfs-обход, т.к. первый, в этом семействе алгоритмов более общий.

За скобками печатной версии оставим проблему хранения графов как во внешней памяти, так и во внутренней, важный вопрос заполненности графа, т.е. разреженный/плотный, а также методику оценки ширины дерева поиска, учета возможной симметрии шаблона и различные стратегии сортировки вершин шаблона в шаге 2. Предложенный метод вычисления биекций основанный на использовании булевых

Таблица 2: Результирующие биекции

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
<b>a</b>	1	1	1	1	2	2	2	2	5	5	5	5	1	1	1	1	2	2	2	2	5	5	5	5	5
<b>b</b>	2	2	5	5	1	1	5	5	1	1	2	2	2	2	5	5	1	1	5	5	1	1	2	2	2
<b>c</b>	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
<b>d</b>	5	5	2	2	5	5	1	1	2	2	1	1	5	5	2	2	5	5	1	1	2	2	1	1	1
<b>e</b>	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6
<b>f</b>	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7

функций от содержимого регистров позволяет значительно повысить производительность алгоритмов graph matching’a, конечно комбинаторной эта задача не перестает быть, но из-за использования архитектуры современных процессоров и их внутреннего параллелизма можно на несколько порядков повысить быстродействие этого семейства алгоритмов. Особенно это касается больших, плотных графов с большими сложными графами шаблонов, на текущий момент можно говорить о повышении быстродействия на 3 порядка (для однопоточной версии) по сравнению с [5] (100 секунд против 0.1). Т.е. радикальном переходе этих задач в разряд задач вычисляемых в real-time, что критически важно в оперативной обработке запросов облачных баз данных и компьютерном зрении вкупе с искусственным интеллектом. Отдельно стоит отметить что при должной доработки, алгоритмы матчинга могут иметь аппаратную реализацию в чипе.

### Литература

- [1] Ullmann J.R. An Algorithm for Subgraph Isomorphism // Journal of the ACM. 1976. Vol. 23. Issue 1. P. 31–42.
- [2] VF2. Cordella L.P., Foggia P., Sansone C., Vento M. 2004. URL: <https://github.com/MiviaLab/vf2lib>.
- [3] RI. Bonnici V., Giugno R., Pulvirenti A., Shasha D., Ferro A. 2013. URL: <https://github.com/InfOmics/RI>.
- [4] VF3. Carletti V., Foggia P., Saggese A., Vento M. 2018. URL: <https://github.com/MiviaLab/vf3lib>.
- [5] VF3LP. Carletti V., Foggia P., Ritrovato P., Vento M., Vigilante V. 2019. URL: <https://github.com/MiviaLab/vf3-parallel>.

- [6] Glasgow. McCreesh C., Prosser P., Trimble J. 2020. URL: <https://github.com/ciaranm/glasgow-subgraph-solver>.
- [7] Intel SI (2020-21). [https://github.com/oneapi-src/oneDAL/tree/master/cpp/oneapi/dal/algo/subgraph\\_isomorphism](https://github.com/oneapi-src/oneDAL/tree/master/cpp/oneapi/dal/algo/subgraph_isomorphism).
- [8] Ryan A.R., Nesreen K.A. The Network Data Repository with Interactive Graph Analytics and Visualization // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2015. Vol. 29 (1). URL: <https://networkrepository.com>.

*Сведения об авторах*

**И. А. Федотов**, к.ф.-м.н., [igor.fedotov@itmm.unn.ru](mailto:igor.fedotov@itmm.unn.ru)

УДК 519.7  
ББК 22.174.1  
И-45

## О совместности систем уравнений над различными классами конечных матроидов

А. В. Ильев

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Омск, Россия

***Аннотация.** В работе доказано, что задача проверки совместности произвольной системы уравнений над конечным матроидом ранга, не превосходящего  $k$ , является  $\mathcal{NP}$ -полной задачей при  $k \geq 2$ . Кроме того, доказано, что задача проверки совместности произвольной системы уравнений над конечным  $k$ -однородным матроидом также  $\mathcal{NP}$ -полна при  $k \geq 2$ , а задача проверки совместности произвольной системы уравнений над конечным матроидом разбиения ранга, не превосходящего  $k$ , полиномиально разрешима при  $k = 2$  и  $\mathcal{NP}$ -полна при  $k \geq 3$ .*

## On compatibility of systems of equations over various classes of finite matroids

A. V. Ilev

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia

В данной работе рассматриваются конечные системы уравнений *диофантовых языков*, т. е. таких языков, в которых множество констант совпадает с множеством элементов алгебраической системы. Поскольку эти языки не содержат функциональных символов, то все определения адаптированы под предикатный случай.

Множество  $T_L(X)$  *термов* языка  $L$  от переменных из множества  $X$  состоит из всех переменных  $x \in X$  и всех констант  $c \in C$  языка  $L$ . Множество  $At_L(X)$  *атомарных формул* языка  $L$  от переменных из множества  $X$  состоит из всех формул вида

$t_i = t_j$  и  $R(t_1, t_2, \dots, t_k)$ , где  $t_1, t_2, \dots, t_k \in T_L(X)$ , а  $R(x_1, x_2, \dots, x_k)$  — предикат языка  $L$ . Атомарные формулы называются *уравнениями*, а произвольные подмножества  $S \subseteq At_L(X)$  — *системами уравнений* языка  $L$ .

Далее приведены традиционные определения обыкновенных графов и матроидов, а затем эти объекты задаются как бесконечные алгебраические системы.

*Граф* — это пара  $G = (V, E)$ , где  $V$  — непустое множество элементов, называемых *вершинами*, а  $E$  — множество неупорядоченных пар различных элементов из  $V$ , называемых *рёбрами*. Если  $(u, v) \in E$ , то вершины  $u$  и  $v$  называются *смежными*.

*Граф* — это алгебраическая система  $G = \langle V, L_E \rangle$ , носитель которой  $V$  — непустое не более чем счётное множество, а язык  $L_E = \langle E, = \rangle$  состоит из бинарного предиката смежности вершин и предиката равенства, причём предикат смежности является *иррефлексивным и симметричным*, т.е. удовлетворяет условиям:

- 1)  $\forall x \neg E(x, x)$  (иррефлексивность);
- 2)  $\forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow E(y, x))$  (симметричность).

Изначально понятие матроида охватывало только конечный случай [1].

*Матроид* — это пара  $M = (U, \mathcal{I})$ , где  $U$  — непустое конечное множество,  $\mathcal{I}$  — непустое семейство его *независимых* подмножеств, обладающее свойствами:

(I1) если  $I \in \mathcal{I}$ ,  $J \subseteq I$ , то  $J \in \mathcal{I}$  (наследственность);

(I2) для любых  $I, J \in \mathcal{I}$  таких, что  $|J| = |I| + 1$ , существует элемент  $j \in J \setminus I$ , для которого  $I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$  (пополнение).

*Матроид ранга, не большего  $k \in \mathbb{N}$* , — это пара  $M = (U, \mathcal{I})$ , где  $U$  — непустое (возможно, бесконечное) множество,  $\mathcal{I}$  — непустое семейство его независимых подмножеств, обладающее свойствами (I1) и (I2), а также свойством (I3):

(I3)  $|I| \leq k$  для всех  $I \in \mathcal{I}$ .

*Матроид ранга, не большего  $k \in \mathbb{N}$* , — это алгебраическая система  $M = \langle U, L_{I_k} \rangle$ , где  $U$  — непустое не более чем счётное множество, а язык  $L_{I_k} = \langle I_0, I_1, \dots, I_k, = \rangle$  состоит из  $k + 1$  предиката независимости, местность каждого из которых совпадает с его порядковым номером, и предиката равенства, причём предикаты независимости удовлетворяют условиям *неупорядоченности* и *неповторения элементов, наследственности* и *пополнения*:

- $\forall x_1 \dots \forall x_n [I_n(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bigwedge_{\pi} I_n(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n))]$ , где  $\pi$  пробегает по всем перестановкам элементов  $x_1, \dots, x_n$ ,  $n \in \{1, \dots, k\}$ ;
- $\forall x_1 \dots \forall x_n [I_n(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j)]$ ,  $n \in \{1, \dots, k\}$ ;
- $\forall x_1 \dots \forall x_n [(I_n(x_1, \dots, x_n) \rightarrow I_{n-1}(x_2, \dots, x_n) \wedge I_{n-1}(x_1, x_3, \dots, x_n) \wedge \dots \wedge I_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})) \wedge I_0]$ ,  $n \in \{2, \dots, k\}$ ;
- $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_{n+1} [I_n(x_1, \dots, x_n) \wedge I_{n+1}(y_1, \dots, y_{n+1}) \rightarrow \bigvee_{i \in \{1, \dots, n+1\}} I_{n+1}(x_1, \dots, x_n, y_i)]$ ,  $n \in \{1, \dots, k-1\}$ .

В дальнейшем используются следующие обозначения систем уравнений.

$S_G$  — система уравнений языка  $L_E$  над графом  $G$ .

$S_{M,k}$  — система уравнений языка  $L_{I_k}$  над матроидом  $M$ .

Отметим, что при  $k_1 < k_2$  для любой системы уравнений  $S_{M,k_1}$  существует система уравнений  $S_{M,k_2}$  такая, что  $S_{M,k_1}$  совпадает с  $S_{M,k_2}$ .

Граф  $G$  называется  *$p$ -дольным*, если множество его вершин можно разбить на  $p$  непересекающихся подмножеств — долей так, что каждое ребро в  $G$  соединяет какую-нибудь вершину одной доли с какой-либо вершиной другой доли. Граф  $G$  называется *полным  $p$ -дольным*, если он является  $p$ -дольным графом и любые его две вершины из разных долей смежны.

Минимальное количество долей, на которые можно распределить вершины произвольного графа, равно минимальному числу цветов, в которое можно раскрасить вершины графа так, чтобы любые две его смежные вершины имели разные цвета. Данная раскраска вершин графа называется *правильной*.

**Теорема 1.** *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений  $S_G$  над конечным полным  $p$ -дольным графом  $G$  является  $\mathcal{NP}$ -полной задачей при  $p \geq 3$ .*

Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что к задаче проверки совместности системы уравнений  $S_G$  над конечным полным  $p$ -дольным графом  $G$  полиномиально сводится какая-нибудь другая  $\mathcal{NP}$ -полная задача распознавания [2], например, распознавательный вариант задачи о правильной  $p$ -раскраске графа при  $p \geq 3$ .

**Теорема 2.** *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений  $S_{M,k}$  над конечным матроидом ранга, не превосходящего  $k$ , является  $\mathcal{NP}$ -полной задачей при  $k \geq 2$ .*

Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что к задаче проверки совместности системы уравнений  $S_{M,2}$  над конечным матроидом  $M$  ранга 2 полиномиально сводится  $\mathcal{NP}$ -полная задача проверки совместности системы уравнений  $S_G$  над конечным полным  $p$ -дольным графом  $G$ .

Отдельно рассмотрен наиболее простой класс матроидов — класс однородных матроидов. Матроид называется  *$k$ -однородным*, если его максимальными независимыми подмножествами являются все подмножества, содержащие ровно  $k$  элементов.

**Теорема 3.** *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений  $S_{M,k}$  над конечным  $k$ -однородным матроидом является  $\mathcal{NP}$ -полной задачей при  $k \geq 2$ .*

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

В качестве ещё одного примера рассмотрен класс матроидов разбиения ранга, не превосходящего  $k$ . Пусть  $P = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$  — разбиение множества  $U$ , т. е.  $\bigcup_{i=1}^k U_i = U$  и  $U_i \cap U_j = \emptyset$  для любых  $i \neq j$ . Множество  $I \subseteq U$  содержится в  $\mathcal{I}_P$  тогда и только тогда, когда  $|I \cap U_i| \leq 1$  для всех  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Тогда пара  $M = (U, \mathcal{I}_P)$  является матроидом, который называется *матроидом разбиения* множества  $U$ , а  $\mathcal{I}_P$  — семейство его независимых подмножеств.

**Теорема 4.** *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений  $S_{M,k}$  над конечным матроидом разбиения  $M$  ранга, не превосходящего  $k$ , является  $\mathcal{NP}$ -полной задачей при  $k \geq 3$ .*

Доказательство теоремы 4 основано на теореме 2 и утверждении, что конечным матроидам разбиений взаимно однозначно соответствуют конечные матроиды ранга 2, все одноэлементные множества которых независимы.

Необходимо выделить случай, когда матроид разбиения имеет ранг  $k = 2$ .

**Теорема 5.** *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений  $S_{M,2}$  над конечным матроидом разбиения  $M$  ранга 2 является полиномиально разрешимой задачей.*

Доказательство теоремы 5 основано на утверждении, что каждому матроиду разбиения  $M$  ранга 2 соответствует полный двудольный граф  $G$ , и на утверждении, что существует полиномиальная процедура проверки совместности произвольной системы уравнений  $S_G$  над конечным полным двудольным графом [3].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

*Литература*

- [1] Whitney H. On the abstract properties of linear dependence // American Journal of Mathematics. 1935. Vol. 57. P. 509–533.
- [2] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
- [3] Ильев А. В., Ильев В. П. Алгоритмы решения систем уравнений над различными классами конечных графов // Прикладная дискретная математика. 2021. № 53. С. 89–102.

*Сведения об авторах*

**А. В. Ильев**, к.ф.-м.н., н.с. Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Омск, artyom\_iljev@mail.ru

УДК 519.174  
ББК 22.174.2  
К-76

**Модулярность псевдослучайных графов**

М. М. Кошелёв<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет, Москва

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт, Долгопрудный

***Аннотация.** В работе даны оценки модулярности случайных подграфов псевдослучайных графов. Доказано, что при  $p = \omega(\sqrt{d})$  предел разности модулярностей исходного псевдослучайного графа и его случайного подграфа почти наверное равен 0.*

**Modularity of pseudorandom graphs**

M. M. Koshelev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Moscow State University, Moscow

<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny

При изучении различных экстремальных свойств регулярных графов часто оказывается полезным понять, как ведет себя второе по абсолютной величине собственное значение его матрицы смежности. Оказывается, что если эта величина достаточно мала, то это позволяет получить точные оценки на количество ребер между любыми двумя подмножествами вершин графа. Сформулируем соответствующую теорему.

**Теорема.** Пусть  $G$  —  $d$ -регулярный граф на  $n$  вершинах, а  $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  — собственные числа матрицы смежности графа  $G$ . Пусть также  $A$  и  $B$  — два (не обязательно непересекающихся) подмножества вершин графа  $G$ . Тогда

$$\left| e(A, B) - \frac{d}{n}|A||B| \right| \leq \lambda \sqrt{|A||B| \left(1 - \frac{|A|}{n}\right) \left(1 - \frac{|B|}{n}\right)},$$

где  $e(A, B)$  — количество ребер, соединяющих вершину из  $A$  с вершиной из  $B$  (ребра, соединяющие вершины из  $A \cap B$ , считаются 2 раза), а  $\lambda = \max\{\lambda_2, -\lambda_n\} = \max\{|\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$ .

Основываясь на данном факте, можно получить множество различных результатов для большинства популярных характеристик графов, таких как числа независимости, хроматические числа, гамильтоновость, пороговые вероятности для появления гигантской компоненты и гамильтонова цикла, а также многих других. В силу этого,  $d$ -регулярные графы, значение  $\lambda$  у которых мало по сравнению с  $d$  часто называют псевдослучайными графами или же  $(n, d, \lambda)$ -графами. Подробный обзор результатов в данной области представлен в работе [1].

В данной работе получен новый результат о модулярности случайных подграфов  $(n, d, \lambda)$ -графов.

**Теорема 1.** Пусть  $S$  — бесконечное подмножество  $\mathbb{N}$ . Пусть  $\{G_n\}_{n \in S}$  — последовательность  $(n, d(n), \lambda(n))$ -графов, для которых  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(n)}{d(n)} < 1$ . Наконец, пусть  $p = p(n) \gg \frac{1}{\sqrt{d}}$ . Рассмотрим последовательность случайных подграфов  $\{G_n(p)\}$ . Тогда

$$\mathbf{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} |q^*(G_n) - q^*(G_n(p))| = 0 \right) = 1.$$

### Литература

- [1] Krivelevich M., Sudakov B. Pseudo-random graphs. More sets, graphs and numbers // Bolyai Society Mathematical Studies. Bolyai Society Mathematical Studies Vol. 15, 199–262.

*Сведения об авторах*

**М. М. Кошелёв**, аспирант, mkoshelev99@gmail.com.

УДК 519.173  
ББК 22.174.2  
К-89

## О $(n, n + 3)$ -графах максимальной степени 3 с наибольшим количеством паросочетаний

Н. А. Кузьмин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики, Нижний Новгород

<sup>2</sup>Нижегородский Государственный Университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород

***Аннотация.** Паросочетанием в графе называется любое множество его попарно несмежных ребер. Индекс Хосойи — это важный топологический индекс графов, определяемый как количество их паросочетаний. На настоящее время для любых  $n$  и  $k \in \{-1, 0, 1, 2\}$  полностью описаны связные графы с  $n$  вершинами и  $n + k$  ребрами, имеющие наибольший индекс Хосойи среди всех таких графов. В данной работе рассматривается и решается задача максимизации индекса Хосойи для случая  $k = 3$  и графов максимальной степени 3.*

## On subcubic $(n, n + 3)$ -graphs with maximum value of the Hosoya index

N. A. Kuzmin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod,

<sup>2</sup> National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod,

Химические соединения часто рассматриваются в форме молекулярных графов, где атомам соответствуют вершины графа, а связям между ними — ребра графа. При этом свойства соединений описываются в терминах так называемых топологических индексов, которые представляют собой некоторые инварианты графов относительно переобозначения вершин и которые позволяют аналитически исследовать некоторые аспекты химической структуры вещества.

В пионерской работе [1] японского химика Харуо Хосойи был предложен топологический индекс, называемый теперь индексом Хосойи. Паросочетанием графа называется любое множество попарно несмежных его ребер. Индекс Хосойи графа определяется как количество его паросочетаний. В работе [1] было показано, что некоторые физико-химические свойства алканов (в частности, их точки кипения) связаны со значением индекса Хосойи их молекулярных графов. Впоследствии обнаружилась связь индекса Хосойи с другими физико-химическими свойствами алканов, а также с энергией сопряженных  $\pi$ -электронных систем.

Поскольку топологические индексы определяют ту или иную энергию химических соединений, то интересна задача по выявлению графов из заданных классов с экстремальным (минимальным или максимальным) значением того или иного топологического индекса. В данной работе рассматриваются только обыкновенные графы, т.е. неориентированные, непомеченные графы без петель и кратных ребер.

Связный граф, имеющий  $n$  вершин и  $m$  ребер, будем называть  $(n, m)$ -графом. В работе [2] было доказано, что среди  $(n, n - 1)$ -графов максимальный индекс Хосойи имеет только  $n$ -путь. В статье [3] рассматривались  $(n, n)$ -графы и там было доказано, что максимальный индекс Хосойи имеет только  $n$ -цикл. В работе [4] доказано, что при  $n \geq 9$  среди  $(n, n + 1)$ -графов максимальный индекс Хосойи имеет только результат соединения ребром 4-цикла и  $(n - 4)$ -цикла. В [4] рассматривался еще и случай  $(n, n + 2)$ -графов. И было доказано, что при  $n \geq 15$  единственный оптимальный граф получается соединением ребрами двух 4-циклов с последовательными вершинами  $(n - 8)$ -цикла. Аналогичный результат (другим, новым и более комбинаторным методом) был получен в [5] при  $n \geq 17$ .

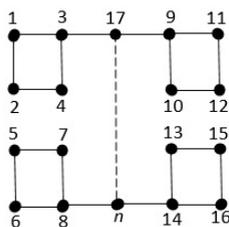


Рис. 1: Единственный максимальный субкубический  $(n, n + 3)$ -граф с  $n \geq 18$  вершинами.

В этой работе рассматривается и решается задача максимизации индекса Хосойи для субкубических (т.е. с максимальной степенью вершин 3)  $(n, n + 3)$ -графов. Оказалось, что для каждого  $n \geq 18$  оптимальный граф единственен и изоморфен графу из Рис. 1, где пунктирный сегмент означает простой путь длины  $n - 17$ .

Способ доказательства теоремы использует метод, предложенный в [5]. В работе [5] доказано, что максимальный  $(n, n + k)$ -граф, при  $k \geq 0$ , не содержит вершин степени 1. Поэтому сначала перечисляются все стяжки субкубических  $(n, n + 3)$ -графов без висячих вершин, которых оказалось ровно 17 штук. Псевдограф  $G'$  называется стяжкой обыкновенного графа  $G$ , если  $G$  получается подразбиениями ребер  $G'$  и  $G'$  содержит минимальное количество вершин. Затем предлагаются конкретные преобразования для субкубических  $(n, n + 3)$ -графов позволяющие выявить стяжки именно максимальных графов и настроить параметры (т.е. количества подразбиений ребер) в них. Они сохраняют количества вершин и ребер, а также связность и субкубичность графов. Способ построения таких локальных преобразований графов, увеличивающих индекс Хосойи, также был предложен в [5].

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, проект номер 21-11-00194.

### Литература

- [1] Hosoya H. Topological index. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons // Bulletin of the Chemical Society of Japan. 1971. Vol. 44. P. 2332–2339.
- [2] Ou J. On extremal unicyclic molecular graphs with maximal Hosoya index // Discrete Applied Mathematics. 2009. Vol. 157. P. 391–397.

- [3] Ou J. On extremal unicyclic molecular graphs with maximal Hosoya index // Discrete Applied Mathematics. — 2009. — Vol. 157. — P. 391–397.
- [4] Liu Y., Zhuang W., Liang Z. Largest Hosoya index and smallest Merrifield-Simmons index in tricyclic graphs // MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry. 2015. Vol. 73. P. 195–224.
- [5] Кузьмин Н.А., Малышев Д.С. Новое доказательство результата о полном описании  $rp$ ,  $(n, n + 2)$ -графов с максимальным значением индекса Хосойи // Математические Заметки. 2022. Т. 111, № 2. С. 258–276.

*Сведения об авторах*

**Н. А. Кузьмин**, стажёр-исследователь, nikita.kuz2000@gmail.com.

УДК 519.77  
ББК 22.174.2  
Л 68

## О единственности минимального рёберного 1-расширения $N$ -мерного гиперкуба для $N \geq 5$

А. А. Лобов<sup>1</sup>, М. В. Абросимов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов

*Аннотация.* В 1993 году F. Harary ввёл понятие  $k$ -рёберно-отказоустойчивой реализации графа или минимального рёберного 1-расширения графа. В данной работе была предложена схема построения минимального рёберного 1-расширения  $N$ -мерного гиперкуба для  $N \geq 2$ , однако оставался вопрос существования других минимальных рёберных 1-расширений. В данной работе удалось доказать, что данное минимальное рёберное 1-расширение гиперкуба является единственным с точностью до изоморфизма.

## On the uniqueness of the minimal edge 1-extension of $N$ -dimensional hypercube with $N \geq 5$

A. A. Lobov<sup>1</sup>, M. V. Abrosimov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, Saratov

## Введение

Граф  $G^* = (V^*, \alpha^*)$  с  $n$  вершинами называется **минимальным рёберным  $k$ -расширением**  $n$ -вершинного графа  $G = (V, \alpha)$ , если  $G$  вкладывается в каждый граф, получающийся из  $G^*$  удалением любых его  $k$  рёбер, и имеет при этом минимально возможное число рёбер [1].

Под вложением понимается изоморфизм части графа.

$N$ -мерный гиперкуб или  $N$ -куб  $Q_N$  — это регулярный  $2^N$ -вершинный граф степени  $N$ , который определяется следующим образом [2]:

- $Q_1 = K_1$ ;
- $Q_N = Q_{N-1} \times K_2$ .

Вершины гиперкуба можно пометить двоичными векторами таким образом, чтобы расстояние между каждыми двумя вершинами равнялось дистанции Хэмминга между их метками, что является прямым следствием его рекурсивного построения:

- $V_N = \{0, 1\}^N$ ;
- $\alpha_N = \{\{u, v\} | u, v \in V_N \wedge h(u, v) = 1\}$ , где  $h$  — расстояние Хемминга;
- $Q_N = (V_N, \alpha_N)$ .

## Минимальные рёберные 1-расширения гиперкубов

Если рассматривать простые графы, то минимальное рёберное  $k$ -расширение существует не у всех графов. Например, полные графы  $K_n$  не имеют минимальных рёберных  $k$ -расширений ни при каких натуральных  $k$ . Гиперкуб  $Q_1$  соответственно тоже не имеет минимального рёберного  $k$ -расширения ни при каких натуральных  $k$ . У графа может быть и несколько неизоморфных минимальных рёберных  $k$ -расширений. Задача поиска минимальных рёберных  $k$ -расширений является вычислительно сложной [3]. В [1] доказывается лемма, которая позволяет охарактеризовать вид минимального рёберного  $k$ -расширения и оценить минимально возможное количество дополнительных рёбер в нём.

**Лемма 1** Если минимальная степень вершины графа  $G$  есть  $d > 0$ , то его минимальное рёберное  $k$ -расширение не содержит вершин степени ниже  $d + k$ .

Ранее была доказана единственность минимального рёберного 1-расширения  $N$ -куба для  $2 \leq N \leq 4$  с точностью до изоморфизма [4].

Определим семейство графов  $Q_N^*$ . Граф  $Q_N^*$  при  $N > 1$  получается путём соединения каждой вершины гиперкуба  $Q_N$  с наиболее удалённой в  $Q_N$  от неё вершиной. Если вершина имеет метку  $k$ , то она соединяется с вершиной, метка которой получается из  $k$  поразрядной инверсией.

В [5] указано, что:

**Теорема 1** Для  $N$ -куба  $Q_N$  при  $N > 1$  граф  $Q_N^*$  является минимальным рёберным 1-расширением.

В данной работе удалось получить аналитическое доказательство единственности минимальных рёберных 1-расширений гиперкубов при  $N > 4$ .

**Лемма 2** Минимальное рёберное 1-расширение гиперкуба  $Q_N$  при  $N \geq 5$  не содержит рёбер, соединяющих вершины, расстояние Хемминга между метками которых равно 3.

Данная лемма используется для доказательства следующей теоремы.

**Теорема 2** При  $N \geq 5$  гиперкуб  $Q_N$  имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное рёберное 1-расширение.

Таким образом задачу можно считать решённой полностью: описаны все возможные минимальные рёберные 1-расширения гиперкубов и доказано, что иных не существует.

### *Литература*

- [1] Абросимов М.Б. Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2012. 192 с.
- [2] Nagary F., Hayes J. P., Wu H.-J. A survey of the theory of hypercube graphs // Computers & Mathematics with Applications. 1988. Vol. 15 (4). P. 277–289.
- [3] Абросимов М.Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Математические заметки. 2010. № 5 (88). С. 643–650.
- [4] Лобов А. А., Абросимов М. Б. Лобов А.А., Абросимов М.Б. О единственности минимального реберного 1-расширения гиперкуба // Сибирская научная школа-семинар "Компьютерная безопасность и криптография-SIBECRYPT'22": труды XXI междунар. конф. 2022. С. 110–112.
- [5] Nagary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol. 23. P. 135–142.

### *Сведения об авторах*

**А. А. Лобов**, аспирант Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского, aisaneikai@mail.ru.

**М. Б. Абросимов**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского, mic@rambler.ru.

## Statistical testing of clusterability

Pierre Miasnikof  
University of Toronto, Canada

Graph clustering, labeling vertices so they form densely connected subgraphs, is a fundamental task in the study of complex networks. Unfortunately, not all graphs are clusterable. Clusterable graphs display heterogeneous local densities. Indeed, such graphs contain pockets of densely connected vertices (subgraphs) that are sparsely connected to the remaining graph. Ensuring a graph displays a clustered structure prior to undertaking any cluster detection effort is essential. Attempting to group graph vertices into clusters when a graph does not have a clustered structure is not only a waste of time, it also leads to misleading conclusions. We present a statistical test to assess the clusterability of a graph. Our test ensures a graph meets the necessary conditions to be deemed clusterable. This test can and should be applied prior to any attempt at clustering.

Joint work with A. Shestopaloff, L. Prokhorenkova and A. Raigorodskii

УДК 519.17  
ББК 22.174.2  
М 74

## Упаковки чётных путей в пороговых графах

Д. Б. Мокеев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Нижегородский филиал), Нижний Новгород

**Аннотация.** Задача об  $H$ -упаковке состоит в нахождении в заданном графе  $G$  максимального числа подграфов, изоморфных некоторому фиксированному графу  $H$  и попарно не содержащих общих вершин. Рассматривается задача об  $H$ -разбиении для случая, когда  $H \cong P_{2k}$ , где  $k$  – некоторое натуральное число, т.е. когда граф  $H$  изоморфен пути чётного порядка. В данной работе исследуется вычислительная сложность задачи в классе пороговых графов и доказывается её полиномиальная разрешимость для произвольного  $k$  в данном классе.

## Even size paths packings of the threshold graphs

D. B. Mokeev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>NRU Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod

<sup>2</sup>NRU Higher School of Economics in Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod

В работе рассматриваются конечные обыкновенные графы, т.е. неориентированные графы  $G = (V, E)$  с множеством вершин  $V = V(G)$  и множеством рёбер  $E = E(G)$ , не содержащим петель и кратных рёбер.

Задача об упаковке  $n$ -путей в графе (о  $P_n$ -упаковке) заключается в следующем. Дан граф  $G$ . Требуется в графе  $G$  найти максимальное число путей размера  $n$ , попарно не содержащих общих вершин. Такое число является инвариантом графа и обозначается  $\mu_{P_n}(G)$ .

Задачи о  $P_n$ -упаковке возникают при проектировании электронных плат с помощью компьютера [1]. Известно, что задача является NP-полной для  $n \geq 3$  для графов общего вида [2] и для субкубических графов [3]. Доказана полиномиальная разрешимость данной задачи в некоторых классах графов для частных случаев  $n$  [5, 4] и для произвольного  $n$  [3, 6].

Граф называется пороговым, если может быть построен из одновершинного графа последовательным добавлением в граф одной изолированной вершины или доминирующей вершины, т.е. отдельной вершины, связанной со всеми остальными вершинами.

Мы рассматриваем задачу о  $P_n$ -упаковке для фиксированного чётного  $n$ , на пороговых графах. Везде в дальнейшем,  $n = 2k$ .

Каждый пороговый граф является кографом, а также расщепляемым графом. Расщепляемым графом называется граф, в котором вершины можно разделить на клику  $C$  и независимое множество  $I$ . В случае, если граф  $G$  пороговый, множества  $I$  и  $C$  могут быть упорядочены  $v_1, v_2, \dots, v_q$  и  $u_1, u_2, \dots, u_p$ , соответственно так, что  $N(v_{i-1}) \subseteq N(v_i)$  для всех  $i \in \{2, 3, \dots, q\}$  и  $N(v_i)$  состоит из последовательных вершин  $u_1, u_2, \dots, u_{p_i}$  для всех  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ . Последовательности  $v_1, v_2, \dots, v_q$  и  $u_1, u_2, \dots, u_p$  называются совершенным упорядочением множества вершин.

Пусть  $G$  – пороговый граф с независимым множеством  $I$  и кликой  $C$  и  $I = (v_1, v_2, \dots, v_q)$ ,  $C = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  – совершенное упорядочение множества вершин графа  $G$ , причём  $p \geq k$  и в множестве  $I$  существует последовательность вершин  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$  таких, что  $\deg(v_{i_j}) \geq j$  для всех  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Найдём такие  $i_1, i_2, \dots, i_k$ , что  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  и для всех  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  и  $\deg(v_x) < j$  для всех  $x < i_j$ . Обозначим  $G'$  граф, полученный из  $G$  удалением вершин  $v_1, v_2, \dots, v_{i_k}, u_1, u_2, \dots, u_k$ . Обозначим  $p$  простой путь в графе  $G$ , построенный на вершинах  $v_{i_1}, u_1, v_{i_2}, u_2, \dots, v_{i_k}, u_k$  в указанной последовательности.

**Теорема 1.** Пусть  $M'$  – наибольшая  $P_{2k}$ -упаковка графа  $G'$ . Тогда  $M' \cup \{p\}$  – наибольшая  $P_{2k}$ -упаковка графа  $G$ .

Поскольку класс пороговых графов является наследственным, граф  $G'$  также пороговый. Причём номера вершин его множеств  $I$  и  $C$  в совершенном упорядочении отличается от соответствующих номеров графа  $G$  на  $i_k$  и  $k$  соответственно.

Таким образом, задача о  $P_{2k}$ -упаковке в пороговом графе сводится к задаче нахождения его совершенного упорядочения, то есть к задаче сортировки вершин множества  $I$  по их степеням, после чего задача нахождения очередного элемента упаковки решается последовательным просмотром вершин множества  $I$ . Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** Задача о  $P_{2k}$ -упаковке в пороговых графах может быть решена за время  $O(|G| \log |G|)$ , где  $|G|$  – число вершин графа.

*Литература*

- [1] Hope A. Component placement through graph partitioning in computer-aided printed-wiring-board design. // Electronics Letters. 1972. Vol. 8, No. 4. P. 87–88.
- [2] Hell P., Kirkpatrick D.G. On the complexity of general graph factor problems // SIAM Journal on Computing. 1983 Vol. 12, P. 601–609.
- [3] Masuyama S., Ibaraki T. Chain packing in graphs // Algorithmica. 1991. Vol. 6, No. 1. P. 826–839.
- [4] Kosowski A., Malafiejski M., Żylinski P. Tighter Bounds on the Size of a Maximum  $P_3$ -Matching in a Cubic Graph // Graphs and Combinatorics. 2008. Vol. 24, No. 5. P. 461–468.
- [5] Alekseev V. E., Mokeev D. König graphs for 3-paths and 3-cycles // Discrete Applied Mathematics, 2016, Vol. 204, P. 1–5
- [6] Malyshev D., Mokeev D. A polynomial-time algorithm of finding a minimum  $k$ -path vertex cover and a maximum  $k$ -path packing in some graphs // Optimization Letters. 2019, Vol. 14, No. 6, P. 1317–1322

*Сведения об авторах*

**Д. Б. Мокеев**, кандидат физико-математических наук, доцент,  
MokeevDB@gmail.com.

**On the ergodicity of a class of 1-dimensional probabilistic cellular automata with size-3 neighbourhoods**

Moumanti Podder

Indian Institute of Science Education and Research (IISER) Pune

Let  $\mathcal{S} = \{(p, q) \in [0, 1]^2 : 0 < p + q \leq 1\}$ . For any fixed  $(p, q) \in \mathcal{S}$ , we consider a 1-dimensional probabilistic cellular automaton (PCA)  $F_{p,q}$ , with alphabet  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ , neighbourhood  $\mathcal{N} = \{0, 1, 2\}$ , and (stochastic) local update rules that are defined as follows. If  $\eta = (\eta(n) : n \in \mathbb{Z})$  is a configuration in  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , then, given  $\eta(n) = \eta(n + 1) = \eta(n + 2) = 0$ , we have

$$F_{p,q}\eta(n) = \begin{cases} 0 & \text{with probability } p, \\ 1 & \text{with probability } 1 - p, \end{cases}$$

and given  $(\eta(n), \eta(n + 1), \eta(n + 2)) \in \mathcal{A}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ , we have

$$F_{p,q}\eta(n) = \begin{cases} 0 & \text{with probability } 1 - q, \\ 1 & \text{with probability } q. \end{cases}$$

We show that  $F_{p,q}$  is ergodic if and only if the probability of draw in certain suitably defined percolation games on  $\mathbb{Z}^2$  is 0. Next, we establish connections between these games and a different but related PCA,  $\widehat{F}_{p,q}$ , with alphabet  $\widehat{\mathcal{A}} = \{0, ?, 1\}$ , that is usually referred to as the “envelope” to  $F_{p,q}$ . We employ the relatively unexplored technique of *weight functions* to show that the probability of appearance of the symbol ? is 0 under *every* stationary distribution for  $\widehat{F}_{p,q}$ , which in turn implies that the probability of draw is 0 in each of our games, for every  $(p, q) \in \mathcal{S}$ .

### Литература

- [1] Bhasin D., Karmakar S., Podder M., Roy S. On a class of probabilistic cellular automata with size-3 neighbourhood and their applications in percolation games. 2022. URL: <https://arxiv.org/abs/2208.11670>.
- [2] Holroyd A.E., Marcovici I., Martin J.B. Percolation games, probabilistic cellular automata, and the hard-core model // Probability Theory and Related Fields. 2019. Vol. 174 (3). P. 1187–1217.

### Authors

**M. Podder**, PhD, Assistant Professor, Indian Institute of Science Education and Research (IISER) Pune, [moumanti@iiserpune.ac.in](mailto:moumanti@iiserpune.ac.in).

УДК 519.179  
ББК 22.174.2  
И-32

## Формирование сообществ в гиперграфах

Р. Р. Насыров<sup>1</sup>, Е. Е. Васильева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>МФТИ, Долгопрудный

<sup>2</sup>ФИАН, Москва, МФТИ, Долгопрудный

*Аннотация.* Проблема выделения сообществ в гиперграфах является естественным обобщением задачи выделения сообществ в графах. И если последняя задача уже широко изучена, выделение сообществ в гиперграфах до сих пор остается малоисследованной областью. В работе изучено формирование сообществ в реальных гиперграфах при ограничениях на размеры его ребер (остаются только ребра с размером  $\leq 2, \leq 3, \dots$ ). Предложены методы сравнения сообществ, выделенных из различных ограничений гиперграфа, и сформулированы требования к таким методам.

При изучении сложных сетей, таких как социальные, биологические, компьютерные, одной из их важных структурных характеристик являются выделенные из них сообщества. Говорят, что граф имеет *структуру сообществ*, если его вершины могут быть сгруппированы таким образом, чтобы внутри одной группы лежало относительно много ребер, а между самими группами лежало мало ребер [1]. Для выделения сообществ графа применяются такие методы, как «метод минимального разреза» [1], «иерархическая кластеризация» [2], «алгоритм Гирвана-Ньюмана» [3] и «алгоритмы максимизации модулярности» [4], среди которых одним из самых эффективных и используемых является «Лувенский алгоритм» [5].

Проблема выделения сообществ в гиперграфах является естественным обобщением аналогичной задачи для графов. Она возникает, когда необходимо учитывать более сложные, многосторонние взаимодействия между объектами. Для ее решения применяются такие алгоритмы, как «Clique-based Method» (CBM) [6], «Degree-Corrected Hypergraph Stochastic Block Model» (HSBM) [7] и другие.

Гиперграфы, в отличие от графов, могут содержать экспоненциально большое число гиперребер. Вследствие этого алгоритмы на гиперграфах могут работать дольше их графовых аналогов. Поэтому «упрощение» гиперграфа с одновременным сохранением его свойств является актуальной задачей.

В работе исследуется возможность «обрезания» гиперграфа, то есть оставления только ребер гиперграфа с размером  $\leq k$  — *k-ограничение*. Нас будет интересовать, как формируется структура сообществ в различных ограничениях гиперграфа. Иными словами, мы задаемся вопросом: как будут отличаться сообщества  $k$ - и  $(k + 1)$ -ограничения гиперграфа.

Гипотеза состоит в том, что при переходе от  $k$ - к  $(k + 1)$ -ому ограничению сообщества будут только объединяться, а не разделяться на несколько частей. Её справедливость приведет к упрощению анализа гиперграфа, так как позволит рассматривать дендрограмму его сообществ. Также она даст возможность рассматривать не все его ребра, а только часть из них, поскольку структура сообществ гиперграфа-ограничения соответствует структуре сообществ всего гиперграфа.

Для количественной проверки гипотезы нужна функция, которая по 2 системам сообществ будет показывать, насколько «хорошо» сообщества одной системы являются объединением сообществ другой. Обозначим за  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_{|\mathcal{C}|}\}$ ,  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_{|\mathcal{D}|}\}$  — две системы сообществ,  $z_{\mathcal{C}}, z_{\mathcal{D}}$  — соответствующие  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  разделения вершин по сообществам (то есть  $z_{\mathcal{C}}[v] = l \Leftrightarrow v \in C_l$ ).

В работе сформулированы требования к такой функции-оценке (штрафу):

1. Штраф должен независимо вычисляться для каждого из сообществ и далее должен быть агрегирован в итоговый. В работе используется агрегация суммированием:  $Loss(\mathcal{C}, z_{\mathcal{D}}) = \sum_{C \in \mathcal{C}} f(C, z_{\mathcal{D}})$ .
2. Дробление сообществ меньших вносят меньший вклад, чем дробление бóльших.
3. Если сообщество не раздробилось, то штраф от него = 0.
4. Пусть вершины сообщества  $C \in \mathcal{C}$  в системе сообществ  $\mathcal{D}$  разделились на  $n_C$  множеств  $\bigsqcup_{i=1}^{n_C} S_i = C$ . Тогда если рассматривать штраф на сообществе  $C$  как агрегацию штрафов на парах  $(C, S_i)$ , то чем ближе  $|S_i|$  к  $\frac{|C|}{n_C}$  ( $n_C > 1$ ), тем больше должен быть соответствующий штраф.

Предложены несколько вариантов функций, удовлетворяющих одному или нескольким из этих требований, основными из которых являются:

1. Количество сообществ в  $\mathcal{C}$ , которые разделились в  $\mathcal{D}$ :

$$f_{split}(\mathcal{C}, z_{\mathcal{D}}) = \sum_{C \in \mathcal{C}} I[\exists v_1, v_2 \in C : z_{\mathcal{D}}[v_1] \neq z_{\mathcal{D}}[v_2]].$$

2. Количество пар вершин, находящихся в одном сообществе в системе  $\mathcal{C}$ , но в разных в системе  $\mathcal{D}$ :

$$f_{pair}(\mathcal{C}, z_{\mathcal{D}}) = \sum_{C \in \mathcal{C}} \sum_{v_1, v_2 \in C} I[z_{\mathcal{D}}[v_1] \neq z_{\mathcal{D}}[v_2]].$$

3. Сбалансированный штраф:

$$f_{bal}(\mathcal{C}, z_{\mathcal{D}}) = \sum_{C \in \mathcal{C}} |C|^{\alpha} \left(1 - \frac{1}{n_C}\right), 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Здесь параметр  $\alpha$  регулирует, насколько больший вклад дает дробление больших сообществ по сравнению с дроблением мелких. Если  $\alpha = 0$ , то вклады одинаковые.

Где  $I$  - индикаторная функция,  $n_C$  — количество сообществ в  $\mathcal{D}$ , к которым относятся вершины сообщества  $C \in \mathcal{C}$ . То есть если  $z_C = [1, 1, 2, 2, 2]$ , а  $z_{\mathcal{D}} = [1, 1, 1, 1, 2]$ , то  $\mathcal{C} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4, v_5\}\}$ , и если  $C = \{v_3, v_4, v_5\}$ , то  $n_C = 2$ , так как вершины  $v_3, v_4$  сообщества  $C$  попали в сообщество 1, а  $v_5$  — в сообщество 2.

С помощью этих функций произведено сравнение формирования сообществ при их выделении с использованием алгоритмов HSBM и CBM. В работе проанализировано формирование сообществ в реальных гиперграфах: Contact-Primary-School, Contact-High-School, NDC-classes [8], House Committees, Senate Committees [9]. Contact-гиперграфы — это гиперграфы взаимодействия детей в школе. В нем вершинами являются дети и учителя, а гиперребрами являются подмножества людей, замеченных вместе видеокамерой. Такие графы обладают структурой сообществ, в которой каждое сообщество — это дети одного класса. NDC-classes — гиперграф, гиперребрами которого являются лекарства, а вершинами являются химические вещества, входящие в их состав. Здесь сообщества могут означать группы лекарств, лечащих от похожих болезней. Committees-гиперграфы — это гиперграфы принадлежности членов сената и палаты представителей США различным комитетам. В таких гиперграфах ожидается найти 2 сообщества — республиканцев и демократов.

На гиперграфах Contact-Primary-School, Contact-High-School, NDC-classes показана справедливость гипотезы об объединении сообществ. Тогда как на дисассортативных гиперграфах (House Committees, Senate Committees) показано, что сообщества, при переходе от  $k$ - к  $(k + 1)$ - ограничению не имеют тенденции «объединяться», а могут дробиться и перегруппировываться в значительной степени.

### Литература

- [1] Girvan M., Newman M.E.J. Community structure in social and biological networks // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2002. Vol. 99 (12). P. 7821–7826.

- [2] Ahn Y.-Y., Bagrow J.P., Lehmann S. Link communities reveal multi-scale complexity in networks // Nature. 2010. Vol. 466 (7307). P. 761–764.
- [3] Newman M.E.J. Detecting community structure in networks // Eur. Phys. Journal B. 2004. Vol. 38 (2). P. 321–330.
- [4] Newman M.E.J. Fast algorithm for detecting community structure in networks // Physical Review E. 2004. Vol. 69 (6). P. 66–133.
- [5] Blondel V.D., J.-L. Guillaume J.-L., R. Lambiotte R., Lefebvre E. Fast unfolding of communities in large networks // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. 2008. Vol. 10. P. 10008.
- [6] Ouyang G., Dey D.K., Zhang P. Clique-Based Method for Social Network Clustering // Journal of Classification. 2020. Vol. 37. P. 254–274.
- [7] Chodrow P.S., Veldt N., Benson A.R. Hypergraph clustering: from blockmodels to modularity // Science Advances. 2021.
- [8] Benson A.R., Abebe R., Schaub M.T. Simplicial closure and higher-order link prediction // Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS). 2018.
- [9] Veldt N., Benson A.R., Kleinberg J. Minimizing Localized Ratio Cut Objectives in Hypergraphs // Proceedings of the ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD). 2020.

*Сведения об авторах*

**Р. Р. Насыров**, бакалавр 3 курс, nasurov.rr@phystech.edu.

**Е. Е. Васильева**, кандидат физ.-мат. наук.

УДК 519.17  
ББК 22.174.2  
Н 52

## Непрерывные вложения дистанционных графов в двумерную сферу

А. М. Неопрятная

Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

## Continuous embeddings of distance graphs into a two-dimensional sphere

A. M. Neopryatnaya

The Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

Рассматривается задача о классе графов, для которых существует непрерывное вложение в сферу. Под непрерывным вложением графа в сферу понимается непрерывная векторная функция заданная на интервале, которая сопоставляет значению радиуса координаты всех вершин графа. При каждом значении радиуса евклидовы длины рёбер должны быть единичными, а вершины должны лежать на сфере данного радиуса. В этот класс входят все графы не содержащие циклов, циклы произвольной длины, псевдодеревья. С другой стороны, если граф содержит  $K_4$  или  $K_{2,3}$ , то непрерывного вложения заведомо не существует.

В докладе будут рассмотрены графы диаметров многогранников Ловаса [1, 2], а также графы единичных расстояний со сколь угодно большой средней степенью, приведённые в работах [3, 4].

Кроме того будут приведены примеры других запрещённых подграфов.

### *Литература*

- [1] Lovász L. Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere // Acta Sci. Math. (Szeged). 1983. Vol. 45. No. 1-4. P. 317–323.
- [2] Horváth Á. G. Strongly self-dual polytopes and distance graphs in the unit sphere // Acta Mathematica Hungarica. 2021. Vol. 163. No. 2. P. 640–651.
- [3] Erdős P., Hickerson D., Pach J. A problem of Leo Moser about repeated distances on the sphere // The American Mathematical Monthly. 1989. Vol. 96. No. 7. P. 569–575.
- [4] Swanepoel K. J., Valtr P. The unit distance problem on spheres // Contemporary Mathematics. 2004. Vol. 342. P. 273–280.

*Сведения об авторах*

**Неопрятная А. М.**, anna.neo01@mail.ru, комбинаторная геометрия и машинное обучение.

УДК 519.174+519.179.1

ББК 181.14

Ш-12

## Об алгоритмических границах для свойств раскрасок случайных гиперграфов

Д. А. Шабанов<sup>1,2</sup><sup>1</sup>МФТИ, Москва<sup>2</sup>НИУ ВШЭ, Москва

В докладе речь пойдет о пороговых вероятностях для свойств раскрасок в классической биномиальной модели случайных гиперграфов. Активное изучение пороговой вероятности наличия правильной раскраски в заданное число цветов началось в 90-е годы с неопубликованной работы [1] Н. Алона и Дж. Спенсера. Они изучали случай двух цветов в классической биномиальной модели случайного  $k$ -однородного гиперграфа  $H(n, k, p)$  и получили первые оценки точной пороговой вероятности для свойства правильной 2-раскрашиваемости. В дальнейшем в работах различных авторов данные результаты были улучшены, в 2011 году в работе А. Коджа-Оглана и К. Панайоту [2] были найдены очень точные оценки искомой величины.

Вызывает значительный интерес и поиск так называемой *алгоритмической границы*, до которой можно не только гарантировать с большой вероятностью наличие искомой раскраски, но и предъявить быстрый алгоритм, который находит ее. Как показали Д. Аклиоптас, Дж. Ким, М. Кривелевич и П. Тетали [3], если немного отойти от порога, то можно предложить быстрый алгоритм, который отыщет правильную раскраску в 2 цвета для случайного гиперграфа с вероятностью, стремящейся к 1. Однако, при приближении к пороговой вероятности алгоритмический поиск становится затруднительным. В работе А. Коджа-Оглана и Д. Аклиоптаса [4] был выявлен эффект *шаттеринга*, суть которого состоит в том, что множество правильных раскрасок хоть и не пусто, но представляет собой очень маленькие кластеры, находящиеся на большом расстоянии друг от друга.

В докладе будут представлены новые результаты, полученные автором в совместных работах с А.К. Гросс, К.А. Козловой и Д.Н. Тяпкиным. Нами были получены обобщения обсуждавшихся результатов для полноцветных раскрасок случайных гиперграфов в  $r$  цветов, а именно есть близкие оценки, до меньшей из которых мы можем предложить быстрый алгоритм для поиска искомой раскраски, а после большей происходит эффект шаттеринга.

### Литература

- [1] Alon N., Spencer J.H. A note on coloring random  $k$ -Sets.
- [2] Coja-Oghlan A., Panagiotou K. Catching the  $k$ -NAESAT Threshold // STOC'12: symposium on Theory of Computing. N.Y. 2012. P. 899–907.
- [3] Achlioptas D., Kim J.H., Krivelevich M., Tetali P. Two-colorings random hypergraphs // Random Structures and Algorithms. 2002. Vol. 20 (2). P. 249–259.
- [4] Achlioptas D., Coja-Oghlan A. Algorithmic barriers from phase transitions // 49th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 2008. P. 793–802.

Сведения об авторах

Д. А. Шабанов, д.ф.-м.н., в.н.с., Московский физико-технический институт, лаборатория комбинаторных и геометрических структур, shabanov.da@mipt.ru.

УДК 519.178

ББК 22.174.2

С-59

## Сложность распознавания мультидистанционных графов в $\mathbb{R}^n$

Г. М. Соколов

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

***Аннотация.** Мы исследуем сложность распознавания  $A$ -дистанционных графов в  $\mathbb{R}^n$ . Доказано, что для всех конечных множеств  $A$ , в которых любые два элемента отличаются хотя бы в два раза, задача распознавания инъективно  $A$ -вложимых графов является NP-трудной при  $n \geq 3$ . Также для некоторых интервалов на отрезке  $[1, 2]$  доказано, что для любого числа  $a$  из этого интервала, кроме, быть может, счётного числа, задача распознавания инъективно  $\{1, a\}$ -вложимых в  $\mathbb{R}^2$  графов является NP-трудной.*

## Complexity of recognizing of multidistance graphs in $\mathbb{R}^n$

G. M. Sokolov

Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

Мы рассматриваем задачу инъективной  $A$ -вложимости графа в  $\mathbb{R}^n$ , то есть проверки того, что существует такое инъективное отображение вершин графа в точки  $\mathbb{R}^n$ , что для любых соединённых ребром вершин расстояние между их образами лежит в множестве  $A$ . В зависимости от того, требуем ли мы, чтобы образы не соединённых ребром вершин не лежали на расстоянии из  $A$ , вложение получается строгим или не строгим. В [1] доказывается, что если множество  $A$  одноэлементное, то для любого типа вложимости и для любого  $n \geq 2$  эта задача является NP-трудной. Также в [1] упоминается, что для других множеств  $A$  сложность распознавания  $A$ -вложимых в  $\mathbb{R}^n$  множеств почти не изучена и представляет большой интерес. Мы предлагаем метод сведения задачи распознавания инъективно вложимых графов с одним разрешённым расстоянием к задаче распознавания инъективно  $A$ -вложимых графов для некоторых множеств  $A$ . При  $n \geq 3$  этот метод позволяет доказать, что для любого конечного множества  $A$ , любые два элемента которого отличаются хотя бы в два раза, задача распознавания инъективно  $A$ -вложимых графов является NP-трудной (не зависимо от строгости вложения). При  $n = 2$  этот метод может не работать для некоторых таких наборов чисел из-за того, что в плоскости нельзя повернуть пограф вокруг прямой, но работает для всех таких множеств расстояний, кроме множества меры 0. Также для  $n = 2$  с помощью модификации этого метода удалось доказать NP-трудность задачи распознавания инъективно  $A$ -вложимых графов для некоторых двухэлементных множеств  $A$ , элементы которых отличаются менее, чем в два раза.

*Литература*

- [1] Tikhomirov M. On complexity of multidistance graph recognition in R1 // Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2017. Vol. 61. P. 1039–1045.

*Сведения об авторах*

Соколов Г. М., студент МФТИ.

УДК 519.178

ББК 22.174.2

С 44

**Число насыщения в кнезеровском графе с простым циклом**

А.Ю. Скоркин

Адыгейский государственный университет

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F$  — некоторый граф. Числом насыщения  $\text{sat}(n, F)$  называется наименьшее количество ребер в таком графе  $G$  на множестве вершин  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ , что

- 1)  $G$  не содержит ни одного подграфа, изоморфного  $F$ ,
- 2) при добавлении любого отсутствующего ребра в  $G$  в нем появляется хотя бы один подграф, изоморфный  $F$ .

Иными словами,  $\text{sat}(n, F)$  — это минимальное количество ребер в максимальном по включению графе без  $F$  на множестве вершин  $[n]$ .

В [1] доказано, что для любых натуральных  $s \leq n$  справедливо

$$\text{sat}(n, K_s) \leq (s - 2) \left( \binom{n}{k} - s + 2 \right) + \binom{s - 2}{2},$$

где  $K_s$  — полный граф на  $s$  вершинах. В дальнейших работах о насыщении рассматривались другие графы  $F$ , а также предполагалось, что необходимо восстановить не все ребра между вершинами из  $[n]$ .

Нахождение  $\text{sat}(n, C_m)$  — тяжелее (как всегда,  $C_m$  — простой цикл на  $m$  вершинах). Задача полностью решена только для  $m = 4, 5$ . При  $m \geq 7$  и  $n \geq 2m - 5$  в [10] доказано, что

$$\left(1 + \frac{1}{m + 2}\right)n - 1 < \text{sat}(n, C_m) < \left(1 + \frac{1}{m - 4}\right)n + \binom{m - 4}{2}$$

В данном докладе рассматривается асимптотика поведения числа насыщения в случае  $m > 5$ .

**Теорема 1.** Пусть  $p$  — фиксированное число от 0 до 1, тогда для любого  $m \geq 5$ , почти всюду, верно следующее неравенство

$$n + \frac{n}{4(m-1) \log_{\frac{1}{1-p}} n} (1 - o(1)) \leq \text{sat}(G(n, p), C_m) \leq n + \frac{n}{2 \log_{\frac{1}{1-p}} n} (1 + o(1))$$

Второй и третий результаты доказывает верхнюю и нижнюю оценку оценку  $C_4$ -насыщения графа  $G(n, p)$  соответственно.

**Теорема 2.** Пусть  $p$  - фиксированное число от 0 до 1, тогда, почти всюду, верно

$$\text{sat}(G(n, p), C_4) \leq \frac{3(1 + (1-p)^3)}{2(1 - (1-p)^3)} n(1 + o(1))$$

когда  $p > 1 - 1/\sqrt[3]{7}$  и

$$\text{sat}(G(n, p), C_4) \leq n \left( \frac{s+1}{2} + s(1-p)^s + \frac{s(1-p)^{2s}}{1 - (1-p)^s} \right) (1 + o(1))$$

когда  $p \leq 1 - 1/\sqrt[3]{7}$ , где  $s$  — наименьшее натуральное число такое, что  $(2s^2 + 1)(1-p)^s < 1$ .

**Теорема 3.** Пусть  $p$  - фиксированное число от 0 до 1, тогда, почти всюду, верно

$$\text{sat}(G(n, p), C_4) \geq \frac{3}{2} n(1 + o(1)).$$

### *Литература*

- [1] Erdős P., Hajnal A., Moon J.W. A problem in graph theory // The American Mathematical Monthly. 1964. Vol. 71. P. 1107–1110.
- [2] Bollobás B. Weakly k-saturated graphs // Beitrage zur Graphentheorie. 1967. P. 25–31.
- [3] Fountoulakis N., Kang R.J., McDiarmid C. Largest sparse subgraphs of random graphs // European Journal of Combinatorics. 2014. Vol. 35. P. 232–244.
- [4] Lovász L. Flats in matroids and geometric graphs // Combinatorial Surveys: proc. 6th British Comb. Conf. L.; N.Y.: Academic Press, 1977. P. 45–86.
- [5] Gun W., Korándi D., Sudakov B.  $K_{s,t}$ -saturated bipartite graphs // European Journal of Combinatorics. 2015. V. 45. P. 12–20. P. 12–20.
- [6] Moshkovitz G., Shapira A. Exact bounds for some hypergraph saturation problems // Journal combinatorial theory. 2015. V. 111. P. 242–248.
- [7] Korándi D., Sudakov B. Saturation in random graphs // Random structures and algorithms. 2017. V. 51. No. 1. P. 169–181.
- [8] Mohammadian A., Tayfeh-Rezaie B. Star saturation number of random graphs // Discrete Math. 2018. V. 341. P. 1166–1170.
- [9] Kronenberg G., Martins T., Morrison N. Weak saturation numbers of complete bipartite graphs in the clique. 2020. URL: <https://arxiv2004.01289>.

- [10] Furedi, Z., Kim, Y. Cycle-Saturated Graphs with Minimum Number of Edges // Journal of Graph Theory. 2012. Vol. 73 (2). P. 203–215.

УДК 519.176  
ББК 22.174.2  
Т 35

## Комбинаторный подход к исследованию чисел слабого насыщения в графах

Н. А. Терехов, М. Е. Жуковский  
Московский физико-технический институт, Москва

### *Аннотация.*

*Для нахождения чисел слабого насыщения нужно доказывать верхние и нижние оценки. Для верхних оценок достаточно привести пример графа, удовлетворяющего определённым условиям, который часто выглядит естественно. Для получения нижних оценок обычно используется алгебраический метод, который сопоставляет некоторым образом рёбрам векторы и оценивает числа через размер базиса. Методы без использования линейной алгебры мало развиты. В данном докладе я представляю разработанный мной комбинаторный метод, который позволил получить асимптотически оптимальные оценки снизу для разных семейств графов в зависимости от связности, показать, что асимптотика чисел слабого насыщения не сконцентрирована в граничных значениях, и также получить точные оценки для некоторых семейств графов.*

## Combinatorial approach to the study of weak saturation numbers for graphs

N. A. Terekhov<sup>1</sup>, M. E. Zhukovskii<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow

Пусть дан непустой граф  $H$ , и граф  $F$  на  $n$  вершинах. Будем говорить, что граф  $F$   $H$ -достраивается до клики, если есть такое упорядочивание  $e_1, \dots, e_s$  рёбер из дополнения к  $F$ , что каждое  $e_i$  образует новую копию графа  $H$  в  $F \cup \{e_1, \dots, e_{i-1}\}$ . Минимальное количество рёбер в  $H$ -достраиваемом до клики графе на  $n$  вершинах обозначим  $\mathbf{wsat}(n, H)$ . Эта величина впервые рассматривается в работе Бела Боллобаша [1].

Пусть дан граф  $H$  и  $U, W \subset V(H)$ , обозначим через  $E(U \leftrightarrow W \text{ в } H)$  множество рёбер графа  $H$ , у которых один конец лежит в  $U$ , а другой конец лежит в  $W$ .

Наши оценки будут выражаться через величины  $\mathbf{h}(k, H)$ , которые на единицу меньше чем минимальное количество рёбер смежных некоторому подмножеству  $V(H)$

размера  $k$ . Формально, для графа  $H$  без изолированных вершин определим для всех  $1 \leq k \leq |V(H)|$ :

$$\mathbf{h}(k, H) = \min \left\{ |E(P \leftrightarrow V(H) \text{ в } H)| - 1 \mid |P| = k, P \subset V(H) \right\}$$

Также понадобится следующая вспомогательная функция: пусть дан граф  $H$  без изолированных вершин и  $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  такое, что  $1 \leq M \leq |V(H)| - 1$ . Для всех  $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  положим:

$$g_H^M(a) = \min \left\{ \mathbf{h}(k_1, H) + \mathbf{h}(k_2, H) + \dots + \mathbf{h}(k_s, H) \mid \sum_{i=1}^s k_i = a, \forall i \ 1 \leq k_i \leq |V(H)| - M \right\}$$

И сами оценки будут выражаться в терминах следующей функции:

$$f_H^M(n) = g_H^M(n - |V(H)|) + |E(H)| - 1$$

Поддерживая нижнюю оценку по мере проведения рёбер, можно доказать следующую теорему:

**Теорема 1.** Пусть дан граф  $H$  без изолированных вершин, тогда

$$\forall n \geq |V(H)| \quad \mathbf{wsat}(n, H) \geq f_H^1(n)$$

Чтобы из этой теоремы получить общие нижние оценки, оценим  $f_H^M(n)$  снизу линейной функцией со следующим коэффициентом:

$$\gamma_H^M = \min \left\{ \frac{\mathbf{h}(k, H)}{k} \mid 1 \leq k \leq |V(H)| - M \right\}$$

Оценивая  $\gamma_H^1$  в зависимости от рёберной связности, получаем следующую теорему:

**Теорема 2.** Пусть дан граф  $H$  с  $\delta(H) = \delta \geq 2$ , тогда

$$\forall n \geq |V(H)| \quad \mathbf{wsat}(n, H) \geq \left( \frac{\delta}{2} - \frac{1}{\delta + 1} \right) \cdot (n - |V(H)|) + |E(H)| - 1$$

Если  $H$  рёберно-двусвязный, или  $H$  связный и  $\delta$  чётное, тогда

$$\forall n \geq |V(H)| \quad \mathbf{wsat}(n, H) \geq \frac{\delta}{2} \cdot (n - |V(H)|) + |E(H)| - 1$$

Если  $H$  связный и  $\delta$  нечётное число, тогда

$$\forall n \geq |V(H)| \quad \mathbf{wsat}(n, H) \geq \left( \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2 \cdot (\delta + 2)} \right) \cdot (n - |V(H)|) + |E(H)| - 1$$

Причём все эти оценки асимптотически оптимальны, то есть существуют графы, на которых это оценки достигаются по асимптотике.

В примерах к этой теореме и, например, в работах [2, 3] асимптотика  $\mathbf{wsat}(n, H)$  была примерно  $\frac{\delta(H)}{2} \cdot n$  или  $(\delta(H) - 1) \cdot n$ . На самом деле асимптотика  $\mathbf{wsat}(n, H)$  не сконцентрирована вокруг  $\frac{\delta(H)}{2} \cdot n$  и  $(\delta(H) - 1) \cdot n$ , что мы показали, доказав следующее:

**Теорема 3.** Для любого целого  $\delta \geq 2$ , для любого  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  и для любого целого  $0 \leq k \leq (\delta - 1 - \frac{\delta}{2}) \cdot (\delta + 1)$  существует непустой связный граф  $H$  такой, что  $\delta(H) = \delta$ ,  $|V(H)| \geq N$  и

$$\mathbf{wsat}(n, H) = \left( \frac{\delta}{2} + \frac{k}{\delta + 1} \right) \cdot n + O(1)$$

Чтобы выполнялось  $\mathbf{wsat}(n, H) \leq f_H^M(n)$  для некоторого  $M$ , необходимо следующее условие:  $\mathbf{wsat}(|V(H)|, H) = |E(H)| - 1$ . Такие графы впервые рассматриваются в [4], и для них можно улучшить оценку из теоремы 1, если есть определенная оценка сверху.

**Теорема 4.** Пусть дан граф  $H$  без изолированных вершин с  $|V(H)| \geq 3$ . Если

$$\forall n \geq |V(H)| \quad \mathbf{wsat}(n, H) \leq f_H^2(n)$$

Тогда

$$\forall n \geq |V(H)| \quad \mathbf{wsat}(n, H) = f_H^2(n)$$

Для получения наименьшей оценки сверху вида  $f_H^M$  введём следующее определение: пусть дан граф  $H$  без изолированных вершин, через  $m(H)$  обозначим минимальное количество вершин графа  $H$ , которые надо удалить, чтобы образовался мост.

Тогда  $f_H^{m(H)}(n)$  - наименьшая оценка сверху такого вида на  $\mathbf{wsat}(n, H)$  для графов с  $\mathbf{wsat}(|V(H)|, H) = |E(H)| - 1$ .

Было высказано предположение, что это точная оценка, но был найден пример, который отрицал даже асимптотическое равенство.

**Proposition 1.** Рассмотрим граф  $H = K_9 \setminus \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$ , тогда

$$f_H^{m(H)}(n) \geq \frac{17}{3} \cdot n + O(1), \text{ но при этом}$$

$$\mathbf{wsat}(n, H) \leq \frac{11}{2} \cdot n + O(1)$$

### Литература

- [1] Bollobás, B. Weakly k-saturated graphs // Beitrage zur Graphentheorie. 1967. P. 25–31.
- [2] Faudree R., Gould R., Jacobson M. Weak Saturation Numbers for Sparse Graphs // Discussiones Mathematicae Graph Theory. 2013. Vol. 33. P. 677–693.
- [3] Faudree R., Gould R., Weak saturation numbers for multiple copies // Discrete Mathematics. 2014. Vol. 336. P. 1–6.
- [4] Faudree J., Faudree R. Weak saturation numbers for graphs // Congressus Numerantium. 2013. Vol. 217. P. 65–81.

*Сведения об авторах*

**Н. А. Терехов**, студент магистратуры МФТИ, terekhov.na@phystech.edu  
**М. Е. Жуковский**, доктор физико-математических наук, доцент,  
 zhukmax@gmail.com

УДК 519.174

ББК 22.174.2

Т 52

## О разбиениях поверхности тора на части меньшего диаметра

А. Д. Толмачев<sup>1</sup>, Д. С. Протасов<sup>1</sup>, В. А. Воронов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический университет, Долгопрудный

<sup>2</sup>Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета,  
 Майкоп

***Аннотация.** Рассматривается задача разбиения поверхности тора на части меньшего диаметра. Получены новые верхние и нижние оценки для различного количества частей разбиения. Доказана точная оценка для разбиения поверхности тора на три части.*

### Partitioning the torus into parts of smaller diameter

A. D. Tolmachev, D. S. Protasov

Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

V. A. Voronov

Caucasus Mathematical Center of Adyge State University, Maikop, Russia

Рассмотрим  $(X, \rho)$  — метрическое пространство, где  $X$  — некоторое множество, а  $\rho$  — метрика, определенная на  $X \times X$ . Пусть  $F \subset X$  — некоторое множество из этого пространства.

Далее, для ограниченного произвольного множества  $F \subset X$  и натурального числа  $n \in \mathbb{N}$  определим следующую величину:

$$d_n(F) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : \exists F_1, \dots, F_n \subset X : F \subseteq F_1 \cup \dots \cup F_n, \forall i \text{ diam}(F_i) \leq x\}.$$

Другими словами, среди всех покрытий множества  $F$  некоторыми  $n$  множествами  $F_1, \dots, F_n$  мы хотим выбрать покрытия, состоящие из множеств как можно меньшего диаметра.

Заметим, что величина  $d_n(F)$  не изменится, если потребовать, чтобы все множества покрытия были выпуклыми и замкнутыми. Это следует из того, что диаметр замыкания  $[\text{conv } F_i]$  выпуклой оболочки  $\text{conv } F_i$  произвольного множества  $F_i$  совпадает с диаметром этого множества. При этом  $F_i \subseteq [\text{conv } F_i]$  и, стало быть,

$$F \subseteq [\text{conv } F_1] \cup \dots \cup [\text{conv } F_n]$$

Более того, для произвольного  $F$  последовательность  $d_n(F)$  являются невозрастающей, поскольку в классе всех покрытий  $n + 1$  множествами существует подкласс, для которого  $F_{n+1} = \emptyset$ , совпадающий с классом всех покрытий  $n$  множествами.

Положим,  $X = \mathbb{R}^2$ , а  $\rho$  — стандартная евклидова метрика. Тогда, определим величину  $d_n = \sup d_n(F)$ , где супремум берется по всем множествам  $F$  единичного диаметра на плоскости. Из сделанного выше замечания ясно, что последовательность  $d_n$  также не возрастает.

Значение  $d_n$  не изменится, если взять супремум только по всем выпуклым и замкнутым множествам  $F$  единичного диаметра. Действительно,  $\text{diam}([\text{conv } F]) = \text{diam}(F)$  и  $F \subseteq [\text{conv } F]$ , и поэтому  $d_n(F) \leq d_n([\text{conv } F])$ .

Также заметим, что более аккуратные рассуждения показывают, что всякое множество единичного диаметра содержится в некотором множестве постоянной ширины (см. [3]) и поэтому в определении  $d_n$  достаточно брать супремум только по выпуклым замкнутым множествам постоянной ширины 1.

Исследование величин  $d_n$  глубоко мотивировано классической проблемой Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра (см. [4], [5]). В разные годы Х. Ленц (см. [6]), М. Дембиньски и М. Лассак (см. [7]), В. Филимонов (см. [8]), Д. Белов и Н. Александров (см. [9]), В. Коваль (см. [10]) оценивали величину  $d_n$  для различных значений  $n$ . В недавних работах (см. [1], [2]) нами были получены существенные улучшения верхних и нижних оценок величин  $d_n$  для плоских множеств.

При этом, данную задачу можно обобщить на другие метрические пространства (см. [11]). Особый интерес представляет разбиение поверхности двумерного тора, так как это множество не будет иметь границы, в отличие от разбиений плоских множеств, рассматриваемых в работах выше.

Будем рассматривать поверхность двумерного тора как фактор-пространство  $T = \mathbb{R}_2/\mathbb{Z}_2$ . Неформально говоря, рассмотрим тор как квадрат со стороной 1, пары противоположных сторон которого “склеены”. Определим метрику  $\rho$  на поверхности тора так:

$$\rho_T((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(\min(|x_1 - x_2|, 1 - |x_1 - x_2|))^2 + (\min(|y_1 - y_2|, 1 - |y_1 - y_2|))^2},$$

что является кратчайшим расстоянием между точками  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  по поверхности тора (здесь и далее считаем, что  $x_1, y_1, x_2, y_2 \in [0, 1]$ ).

Несложно показать, что  $\rho_T(x, y)$  является метрической функцией на множестве  $T$ . Очевидно, что  $\text{diam}(T) = 1$ , то есть сама поверхность тора есть ограниченное множество диаметра 1. Далее для метрического пространства  $(T, \rho_T)$  будем рассматривать величины  $d_n(T)$ . Важно отметить, что в этом случае используется другая метрика (в отличие от разбиения плоских множеств), а также то, что величины  $d_n(T)$  ранее нигде не исследовались.

Для разбиений поверхности тора  $T$  на части меньшего диаметра нами были получены следующие оценки.

**Теорема 1.** *Для произвольного количества частей разбиения верно*

$$d_n(T) \leq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n^2}}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

$$d_{2n^2}(T) \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

$$d_{2nm}(T) \leq \max \left( \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{9m^2}}, \frac{2}{3m} \right), \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (3)$$

**Теорема 2.** Для каждого натурального  $n > 4$  верно

$$d_n(T) \geq \frac{2}{\sqrt{\pi n}} \quad (4)$$

А также при любом натуральном  $k$  верно

$$d_{k^2+k-1}(T) \geq \frac{1}{k} \quad (5)$$

Отдельно отметим, что доказана точная оценка для  $n = 3$ .

**Теорема 3.** Для разбиения на три части верно  $d_3(T) = \frac{\sqrt{13}}{6} \approx 0.6009$ .

Следующая теорема верна только при предположении верности следующей ниже леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $F$  – выпуклое множество на плоскости или двумерный тор  $T$ . Тогда величина  $d_n(F)$  не изменится, если дополнительно потребовать от покрытий в супремуме не только выпуклость и замкнутость, но и пересечение только по граничным точкам.

**Теорема 4.** Если верна лемма 1, то для поверхности тора  $T$  и любого целого  $n \geq 6$  верно:

$$d_n(T) \geq \frac{1}{\sqrt{(f_5 + f_7) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + f_6(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}}, \quad (6)$$

где  $f_h$  – площадь максимального  $h$ -угольника единичного диаметра.

Приведем таблицу полученных оценок  $d_n(T)$  для поверхности двумерного тора при  $1 \leq n \leq 25$ . В последнем столбце указан “зазор” между оценками, который подсчитывается как отношение разности верхней и нижней оценок к нижней оценке.

Таблица 1: Полученные результаты  $d_n(T)$

n	Полученная оценка снизу	Полученная оценка сверху	Зазор
1	0.7071	0.7071	точная
2	0.7071	0.7071	точная
3	0.6009	0.6009	точная
4	0.5176	0.5590	8.0%
5	0.5000	0.5385	7.7%
6	0.4920	0.5270	7.1%
7	0.4562	0.5200	14.0%
8	0.4261	0.4419	3.7%
9	0.4022	0.4172	3.7%
10	0.3811	0.4007	5.7%
11	0.3637	0.3885	6.8%
12	0.3479	0.3611	3.8%
13	0.3345	0.3536	5.7%
14	0.3221	0.3392	5.3%
15	0.2925	0.3206	2.9%
16	0.3013	0.3125	3.7%
17	0.2925	0.3065	4.8%
18	0.2841	0.2962	4.3%
19	0.2766	0.2943	6.4%
20	0.2695	0.2885	7.0%
21	0.2631	0.2801	6.5%
22	0.2570	0.2756	7.2%
23	0.2514	0.2695	7.2%
24	0.2460	0.2604	5.8%
25	0.2411	0.2556	6.0%

*Литература*

- [1] Tolmachev A.D., Protasov D.S. Covering Planar Sets // Doklady Mathematics. 2021. Vol. 104. P. 196–199
- [2] Tolmachev A.D., Protasov D.S., Voronov V.A. Coverings of planar and threedimensional sets with subsets of smaller diameter // Discrete Applied Mathematics. 2022. Vol. 320. P. 270–281.
- [3] Eggleston H.G. Convexity. 1958. 143 p.
- [4] Borsuk K. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre // Fundamenta Math. 1933. Vol. 20. P. 177–190.
- [5] Raigorodskii A.M. Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory. J. Pach ed. Springer. 2013. P. 429–460.

- [6] Lenz H. Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von möglichst kleinem Durchmesser // Jber. Deutsch. Math. Verein. 1956. Vol. 58. P. 87–97.
- [7] Dembiński M., Lassak M. Covering plane sets with sets of three times less diameter // Demonstratio Math. 1985. Vol. 18. № 2. P. 517–526.
- [8] Филимонов В.П. О покрытии плоских множеств // Матем. сборник. 2010. Т. 201. № 8. С. 127–160.
- [9] Белов Д., Александров Н. О разбиении плоских множеств на шесть частей малого диаметра // Труды МФТИ. 2012. Т. 4, № 1, С. 11–13.
- [10] Коваль В.О. О разбиении плоских множеств на 6 частей малого диаметра // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2020. Т. 497. С. 100–123.
- [11] Yanlu Lian, Senlin Wu. Partition Bounded Sets Into Sets Having Smaller Diameters // Results in Mathematics. 2021. Vol. 76(116).

*Сведения об авторах*

**Толмачев А. Д.**, студент 1 курса магистратуры физтех-школы прикладной математики и информатики Московского физико-технического института.  
tolmachev.ad@phystech.edu

**Протасов Д. С.**, студент 1 курса магистратуры физтех-школы прикладной математики и информатики Московского физико-технического института.  
protasov.ds@phystech.edu

**Воронов В. А.**, кандидат технических наук, Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета.  
v-vor@yandex.ru

УДК 519.173  
ББК 22.174.2  
Т 66

## О выразимости свойства нетеровости по уравнениям для графов

А. В. Трейер

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск

***Аннотация.** Алгебраическая система называется нетеровой по уравнениям, если любая система уравнений над этой алгебраической системой от конечного числа переменных эквивалентна своей конечной подсистеме. Доказано, что существует два элементарно эквивалентных простых графа, один из которых нетеров по уравнениям, а другой не является таким.*

## On first order definability of equational noethericity property for graphs

A. V. Treier

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk

Направление математики «Универсальная алгебраическая геометрия» изучает уравнения над различными алгебраическими системами: группами, полугруппами, матроидами, графами и т.д. В монографии [1] содержится достаточно полное описание достижений в этой области и большой список работ, связанных с универсальной алгебраической геометрией. Данная работа относится к этому направлению исследований. С другой стороны, эта работа может рассматриваться как продолжение изучения теоретико-модельных свойств бесконечных простых графов, которые мы начали в [2, 3, 4].

Понятие нетеровости по уравнениям играет центральную роль в универсальной алгебраической геометрии. Алгебраическая система  $A$  называется нетеровой по уравнениям, если для любой системы  $S$  уравнений над  $A$  от конечного набора переменных существует конечная подсистема  $S'$ , которая эквивалентна  $S$ . Нетеровы по уравнениям алгебраические системы имеют много хороших свойств (подробности см. в [1]):

1. Достаточно рассматривать только конечные системы уравнений над  $A$ ;
2. Существует общий подход к изучению алгебраических систем уравнений над  $A$ ;
3. Любое алгебраическое множество над  $A$  можно представить как конечное объединение неприводимых алгебраических множеств.

Чтобы рассматривать граф как алгебраическую систему и изучать уравнения над графами, нам нужно сначала определиться с языком для графов. Мы будем рассматривать неориентированные графы без петель и меток, а значит язык выбранной категории графов будет таким:  $L = \{E(x, y), = (x, y)\}$ . Здесь символ  $E(x, y)$  обозначает предикат соседства для вершин  $x$  и  $y$ , а  $= (x, y)$  — предикат равенства для произвольных вершин  $x$  и  $y$ . Будем рассматривать уравнения над графами с коэффициентами,

то есть уравнение может содержать любую вершину из графа над которым мы решаем уравнение. Какие уравнения можно составить используя язык  $L$  и константы? В отличие от языков с функциональными символами, в выбранном нами языке теории графов всего шесть типов уравнений:  $x = y, E(x, y), x = v, E(x, v), u = v, E(u, v)$ , где  $x, y$  – переменные,  $u, v$  – константы.

Язык теории простых графов первого порядка вполне выразим. Многие важные свойства графов можно определить с помощью формул первого порядка (см. [5]). Например, легко показать, что произвольный конечный граф может быть полностью определен формулой первого порядка. С другой стороны, свойство графов «быть связными» графов невыразимо языком логики первого порядка теории графов.

Ранее автором и И.М. Бучинским были описаны нетеровы по уравнениям графы. Пользуясь этим описанием мы доказали, что свойство графа «быть нетеровым по уравнениям» не может быть выражено формулами логики первого порядка теории графов, так как существуют два графа, такие что они элементарно эквивалентны друг другу, но один из них нетеров по уравнениям, а другой не обладает свойством нетеровости.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

### *Литература*

- [1] Даниярова Э.Ю., Мясников А.Г., Ремесленников В.Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. Новосибирск, 2016. 243 с.
- [2] Remeslennikov V., Treier A. Universal classes in the category of simple graphs // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1260 (2).
- [3] Remeslennikov V., Treier A. Elementary classes of graphs in a language without equality predicate // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1546.
- [4] Treier A., Equational noethericity for graphs and hypergraphs // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1791.
- [5] Zhukovskii M., Raigorodskii A. Random graphs: models and asymptotic characteristics // Russian Mathematical Surveys. 2015. Vol. 70 (1). P. 33-82.

*Сведения об авторах*

**А. В. Трейер**, к.ф.-м.н., с.н.с., зав. лаб., alexander.treyer@gmail.com.

УДК 519.178  
ББК 22.174.2  
В-22

## Максимальное число расширений в случайном графе

С. В. Вахрушев<sup>1,2</sup>, М. Е. Жуковский<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

<sup>2</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный

**Аннотация.** Пусть  $\Delta_n$  — это наибольшая степень вершины в случайном графе  $G(n, p)$ . В. Vollobás в 1980 г. доказал существование констант  $a_n, b_n$ , таких что  $\frac{\Delta_n - a_n}{b_n}$  сходится по распределению к случайной величине, имеющей стандартное распределение Гумбеля. Недавно I. Rodionov и M. Zhukovskii [3] смогли обобщить данный результат для максимального числа общих соседей  $k$  вершин  $\Delta_{k,n}$ , показав, что после масштабирования этой случайной величины с другими константами, будет снова наблюдаться сходимость к распределению Гумбеля. Возникает естественная гипотеза, что для максимального числа расширений произвольного фиксированного вида после центрирования и нормирования будет снова наблюдаться сходимость к распределению Гумбеля. В данной работе был предложен метод условной максимизации, с помощью которого удалось найти константы и показать сходимость к фиксированному распределению для масштабированного максимального числа расширений специального вида. Оказывается, что в общем случае предельное распределение необязательно является распределением Гумбеля, более того, его плотность не выражается в элементарных функциях. Метод обобщает все результаты, полученные ранее, и базируется на методе корреляционных неравенств из статьи M. Isaeu, R. Zhang, I. Rodionov и M. Zhukovskii [8].

## Maximum number of extensions in the random graph

S. V. Vakhrushev<sup>1,2</sup>, M. E. Zhukovskii<sup>2</sup>

<sup>1</sup> St. Petersburg State University, St. Petersburg

<sup>2</sup> Moscow Institute of Physics and Technology (National State University), Dolgoprudny

Изучаются числа расширений в плотном биномиальном случайном графе, а именно нахождение асимптотического распределения максимального числа расширений. Под расширением заданного множества вершин (корней)  $V$  (небольшого размера) подразумевается непересекающееся с этим множеством множество  $U$ , ребра в котором (а также между  $U$  и  $V$ ) должны быть проведены в соответствии с некоторым шаблоном. Так, например, степень вершины — это количество расширений, для которых шаблоном является ребро, одна из вершин которого является корнем. Другими примерами количеств расширений являются число треугольников, содержащих заданную вершину, количество общих соседей заданного набора вершин, количество путей заданной длины между двумя фиксированными вершинами, и так далее. Ряд работ (восходящих к Боллобашу и Спенсеру) посвящены изучению распределения

максимального числа расширений (по всем способам выбрать корни). Нам удалось обобщить все известные результаты и доказать существование предельного распределения (и явно его предъявить) для широкого класса *симметричных расширений*. Единственное ограничение, накладываемое на шаблон, выглядит следующим образом: если  $v_1, v_2$  – два корня шаблона, а  $u_1, u_2$  – две некорневые вершины, такие, что  $u_1$  – общий сосед вершин  $v_1, v_2$ , а  $u_2$  смежна с  $v_1$ , то  $u_2$  должна быть смежна и с  $v_2$ .

### *Литература*

- [1] Ivchenko G.I. On asymptotic behaviour of the degrees of vertices in a random graph // *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* 1973. Vol. 18 (1). P. 195–203.
- [2] Bollobás B. The distribution of the maximum degree of a random graph // *Discrete Mathematics.* 1980. Vol. 32. P. 201–203.
- [3] Rodionov I., Zhukovskii M. The distribution of the maximum number of common neighbors in the random graph. 2018. URL: <https://arXiv:1804.04430>.
- [4] Gnedenko B. Sur la Distribution Limite du Terme Maximum d'une S'erie Al'eatoire // *Annals of Mathematics.* 1943. Vol. 44. P. 423–453.
- [5] Nadarajah S., Mitov K. Asymptotics of Maxima of Discrete Random Variables // *Extremes.* 2002. Vol. 5. P. 287–294.
- [6] Spencer J.H. Counting extensions // *Journal of Comb. Theory. Ser. A.* 1990. Vol. 55. P. 247–255.
- [7] Sileikis M., Warnke L. Counting extensions revisited. 2019. URL: <https://arxiv.org/pdf/1911.03012.pdf>.
- [8] Isaev M., Rodionov I., Zhang R., Zhukovskii M. Extremal independence in discrete random systems. URL: <https://arXiv:2105.04917>.
- [9] Bollobás B., Degree sequences of random graphs // *Discrete Mathematics.* 1981. Vol. 33. P. 1–19.
- [10] Boppona R., Spencer J. A useful elementary correlation inequality // *Journal Combin. Theory. Ser. A.* 1989. Vol. 50. P. 305–307.
- [11] Janson S., Coupling and Poisson Approximation // *Acta Applicandae Mathematicae.* 1994. Vol. 34. P. 7–15.
- [12] Malinovsky Y. A note on the distribution of the extreme degrees of a random graph via the Stein-Chen method. URL: <https://arXiv:2204.05881>.
- [13] Guolong Cui. Exact Distribution for the Product of Two Correlated Gaussian Random Variables // *IEEE Signal Processing.* 2016. P. 1662–1666.
- [14] Arratia R., Goldstein L., Gordon L. Two moments suffice for Poisson approximations: the Chein-Stein method // *The Annals of Probability.* 1989. Vol. 17. No. 1. P. 9–25.
- [15] Shelah S., Spencer J. Zero-one laws for sparse random graphs // *Journal of Amer. Math. Soc.* 1988. Vol. 1. P. 97–115.

- [16] Luczak T., Spencer J. When does the zero-one law hold? // Journal of Amer. Math. Soc. 1991. P. 451–468.
- [17] Bohman T., Frieze A., Lubetzky E. Random triangle removal // Advances in Mathematics. 2015. Vol. 280. P. 379–438.
- [18] Bohman T., Keevash P. The early evolution of the H-free process // Inventiones mathematicae. 2010. Vol. 181. P. 291–336.

*Сведения об авторах*

**С. В. Вахрушев**, студент магистратуры СПбГУ, vakhrushev.sv@phystech.edu.  
**М. Е. Жуковский**, д-р физ.-мат. наук, доцент, zhukmax@gmail.com.

УДК 514.752.5

ББК 22.151.6

В-31

## Новое семейство непериодических замощений плоскости квадратными плитками

Н. К. Верещагин<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

<sup>2</sup>НИУ ВШЭ, Москва

<sup>3</sup>Яндекс, Москва

***Аннотация.** В работе приводится новое семейство непериодических замощений плоскости квадратными плитками. Как и замощения Бергера — Робинсона и Дюрана — Левина — Шеня, замощения этого семейства имеют иерархическую структуру. Это позволяет использовать их для доказательства неразрешимости проблемы Домино.*

## A new non-periodic family of tilings of the plane by square tiles<sup>1</sup>

N. K. Vereshchagin<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Moscow State University, Moscow

<sup>2</sup>HSE University, Russian Federation, Moscow

<sup>3</sup>Yandex, Moscow

---

<sup>1</sup>This paper was prepared within the framework of the HSE University Basic Research Program.

## Введение

Будем называть *набором плиток* конечное множество квадратных плиток<sup>2</sup> размера  $1 \times 1$  вместе с локальным правилом, которое определяет, как эти плитки можно соединять друг с другом в замощении плоскости. Локальное правило задается натуральным числом  $k$  и разделением всех замощений квадрата  $k \times k$  плитками этого набора на *разрешенные* и *запрещенные*. Замощение плоскости плитками набора называется *корректным*, если оно не содержит в себе запрещенных квадратов размера  $k \times k$ . Набор плиток называется *совместным*, если существует корректное замощение его плитками всей плоскости.

Вот пример совместного набора плиток. Рассмотрим набор из двух плиток, синей и красной. Разрешим все замощения квадрата  $2 \times 2$ , в котором ровно две красных плитки и ровно две синих (таких  $C_4^2 = 6$ ), и запретим остальные 10 замощений квадрата  $2 \times 2$ . Примером корректного замощения плоскости является «шахматное» замощение. Есть и другие корректные замощения, всего их континуум.

Замощение плоскости называется *периодическим*, если оно имеет хотя бы один ненулевой период. Скажем, шахматное замощение из предыдущего примера периодическое. Иначе будем называть замощение *непериодическим*. Совместный набор плиток называется *периодическим*, если существует периодическое замощение его плитками всей плоскости, а иначе он называется *непериодическим*.

Поиски непериодических наборов плиток мотивированы следующей проблемой Домино: построить алгоритм, который по набору плиток выясняет его совместность. Эта проблема поставлена в статье Хао Вана [4] и там же объяснено, как эта проблема связана с существованием непериодических наборов плиток: Дело в том, что оба множества, множество несовместных наборов и множество периодических наборов, являются перечислимыми. Если бы любой совместный набор был периодическим, то мы имели бы два перечислимых множества, одно из которых является дополнением другого. По теореме Поста оба множества были бы тогда разрешимыми, значит проблема Домино имела бы положительное решение.

Однако Роберт Бергер (ученик Вана) доказал существование непериодического набора плиток и с его помощью доказал неразрешимость проблемы Домино. Следует отметить, что не любой непериодический набор плиток помогает решить проблему Домино. Для этого нужно, чтобы замощения плитками набора имели иерархическую структуру. Это означает, что в любом корректном замощении плитки должны объединяться в так называемые суперплитки, соединенные между собой так же, как и исходные плитки. Все наборы, упоминаемые в этой статье, обладают этим свойством.

В дальнейшем непериодический набор Бергера был упрощен Робинсоном [3]. А набор Робинсона был еще более упрощен Дюраном, Левиным и Шенем [2]. Говоря здесь про упрощение, мы имеем в виду не только количество плиток в наборе и простоту локального правила, но и доказательство того, что этот набор непериодичен. В настоящей работе мы предлагаем еще один набор, сравнимый по простоте с набором из [2], но основанный на других идеях, чем предыдущие наборы.

## Непериодический набор плиток

В нашем наборе  $4^6 = 4096$  плиток. На Рис. 1(а) изображено, как выглядят плитки. Каждая плитка разделена диагоналями на 4 прямоугольных треугольника, покра-

<sup>2</sup>чтобы отличить плитки друг от друга, мы будем представлять, что разные плитки имеют разные цвета

шенных в зеленый или красный цвет. Катеты этих 4 треугольников ориентированы и также покрашены в красный или зеленый цвет. На одной диагонали плитки одна из стрелок входит в центр плитки, а другая выходит, при этом они имеют один и тот же цвет — красный или зеленый (на рисунке эти стрелки изображены фиолетовым). На другой диагонали плитки обе стрелки входят в центр и имеют разные цвета. Каждый из четырех краев плитки (изображены на картинке черным) имеет свою ориентацию и цвет. Наконец, плитки можно поворачивать на углы, кратные  $90^\circ$ . Конкретный пример плитки изображен на Рис. 1(b). Всего получается 16 раз-



Рис. 1: (a) Общий вид плиток. (b) Пример плитки.

ных плиток без учета цветов и ориентации краев: двумя способами можно выбрать цвет фиолетовых стрелок и двумя способами — их ориентацию, затем каждую из 4 полученных плиток можно повернуть на 4 угла, кратных  $90^\circ$ . Каждый из 4 краев можно ориентировать 2 способами и выбрать цвет 2 способами. Итак, мы получаем  $16 \times 4^4 = 4^6$  плиток.

Локальное правило соединения плиток:

1. Плитки граничат сторона к стороне, причем общие стороны плиток покрашены и ориентированы одинаково.
2. Любые два соседних треугольника (из разных плиток) имеют разный цвет.
3. В вершинах плиток (там, где сходятся четыре плитки) разрешены только перекрестки, изображенные на Рис. 2.

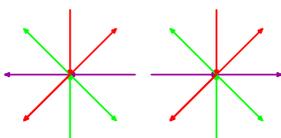


Рис. 2: Разрешенные перекрестки. Две стрелки, окрашенные фиолетовым цветом, могут иметь любой, но один и тот же цвет.

**Теорема 1.** Построенный набор плиток совместен, но неперiodичен.

### Литература

- [1] Berger R. The undecidability of the domino problem // Memoirs of the American Mathematical Society. 1966. 72 p.
- [2] Durand B., Levin L., Shen A. Local rules and global order, or aperiodic tilings // The Mathematical Intelligencer. 2005. 27 (1). P. 64–68.

- [3] Robinson R.M. Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane // *Inventiones Mathematicae*. 1971. 12 (3). P. 177–209.
- [4] Wang H. Proving theorems by pattern recognition-II // *Bell System Technical Journal*. 1961. 40 (1). P. 1–41.

*Сведения об авторе*

**Н. К. Верещагин**, доктор физико-математических наук, профессор,  
nikolay.vereshchagin@math.msu.ru.

УДК 519.174.7  
ББК 22.174.2  
В-75

**Плотность  $(n+1)$ -цветных точек в правильных раскрасках  $n$ -мерного евклидова пространства**

В. А. Воронов

Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета,  
Майкоп

Рассматриваются свойства раскрасок евклидова пространства, отвечающих постановке задачи Нельсона-Хадвигера-Эрдёша, т.е. такие раскраски в конечное число цветов, в которых нет двух точек на единичном расстоянии, имеющих одинаковый цвет. В предыдущих работах было показано, что найдется точка, являющаяся предельной по крайней мере для  $n+1$  из одноцветных множеств [1, 2]. Кроме того, такую точку можно найти в правильном симплексе со стороной длины 2.

В докладе рассматриваются некоторые усиления результатов о выпуклых множествах, заведомо содержащих точку, которая обладает указанным выше свойством.

*Литература*

- [1] Kanel-Belov A., Voronov V., Cherkashin D. On the chromatic number of an infinitesimal plane layer // *St. Petersburg Mathematical Journal*. 2018. 29 (5). P. 761–775.
- [2] Cherkashin D.D., Kanel-Belov A.J., Strukov G.A., Voronov V.A. On the chromatic numbers of 3-dimensional slices. 2022. URL: <https://arxiv.org/abs/2208.02230>.

УДК 519.178  
ББК 22.174.2  
Я-76

## Различные размеры индуцированных подграфов на $k$ вершинах в случайном графе

Ю. Н. Яровиков, М. Е. Жуковский  
Московский физико-технический институт, Москва

**Аннотация.** Для произвольного графа  $G$  и натурального числа  $k$  рассмотрим множество  $\mathcal{E}(G, k) = \{e(H) : H \leq G, v(H) = k\}$  количество ребер всех индуцированных  $k$ -вершинных подграфов графа  $G$ . Мы изучаем устройство  $\mathcal{E}(G, k)$  для случайного графа  $G = G(n, p)$  и функции  $k = k(n)$ . Мы доказали, что а.п.н.  $|\mathcal{E}(G, k)| = \Theta(k^{3/2} \sqrt{\ln n/k})$ . Кроме того, мы доказали, что а.п.н. множество  $|\mathcal{E}(G, k)|$  содержит отрезок длины  $\Theta(k^{3/2} \sqrt{\ln n/k})$ .

## Distinct sizes of induced subgraphs on $k$ vertices of the random graph

Y. N. Yarovikov, M. E. Zhukovskii  
Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow

Для произвольного графа  $G$  и натурального числа  $k$  рассмотрим множество  $\mathcal{E}(G, k) = \{e(H) : H \leq G, v(H) = k\}$ . Изучение множества  $\mathcal{E}(G, k)$  тесно связано с понятием  $c$ -рамсеева графа.

**Определение 1.** Граф  $G$  на  $n$  вершинах называется  $c$ -рамсеевым, если и размер его максимальной клики, и его число независимости ограничены величиной  $c \log n$ .

Положим  $\phi(G, k) = |\mathcal{E}(G, k)|$ . Эрдёш, Фаудри и Шош сформулировали гипотезу, о связи введенных определений ([2], [3]).

**Гипотеза 1.** Для любого  $c > 0$  найдется  $b > 0$ , для которой справедливо следующее утверждение. Если граф  $G$  на  $n$  вершинах является  $c$ -рамсеевым, то

$$\sum_{k \leq n} \phi(G, k) \geq bn^{5/2}.$$

Алон и Косточка показали ([1]), что для указанной величины справедлива оценка  $\Omega(n^2)$ . Данная оценка следует из утверждения ниже.

**Теорема 1** (Алон, Косточка, 2009, [1]). Для любого  $0 < \varepsilon < 1/2$  существует  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ , для которого справедливо следующее. Пусть  $n > n_0$  и пусть  $G$  — граф на  $n$  вершинах, для которого  $\varepsilon < e(G) \binom{n}{2}^{-1} < 1 - \varepsilon$ . Тогда для любого  $k \leq \frac{\varepsilon n}{3}$  справедливо

$$\phi(G, k) \geq 10^{-7}k.$$

Естественным кандидатом на  $c$ -рамсеев граф является случайный граф  $G(n, 1/2)$ . Алон и Косточка показали, что для случайного графа выполняется заключение Гипотезы 1.

**Теорема 2** (Алон, Косточка, 2009, [1]). Пусть  $G = G(n, 1/2)$  — случайный граф. Тогда а.п.н. для  $k < 10^{-3}n$  множество  $\mathcal{E}(G, k)$  содержит отрезок длины по крайней мере  $10^{-5}k^{3/2}$ .

Мы изучаем поведение множества  $\mathcal{E}(G, k)$  для случайного графа  $G(n, p)$  для константного  $p$ . Положим  $\psi(G, k) = \max\{e(G') - e(G'') : G', G'' \leq G, v(G') = v(G'') = k\}$ . Из неравенства Чернова следует, что для произвольной функции  $k = k(n)$  а.п.н.

$$\psi(G, k) = O(k^{3/2}\sqrt{\ln n/k}).$$

Очевидно,  $\phi(G, k) \leq \psi(G, k)$ , поэтому такая же оценка верна и для  $\phi(G, k)$ . Это не совпадает с нижней оценкой, равной  $\Omega(k^{3/2})$ , полученной из Теоремы 2. Мы доказали, что истинный порядок для величины  $\phi(G, k)$  составляет  $\Theta(k^{3/2}\sqrt{\ln n/k})$ .

**Теорема 3.** Пусть  $G = G(n, p)$  — случайный граф,  $p = \text{const}$ . Пусть также  $k = k(n)$  — некоторая функция. Тогда множество  $\mathcal{E}(G, k)$  а.п.н. содержит отрезок длины  $\Theta(k^{3/2}\sqrt{\ln n/k})$ .

Данная оценка совпадает с верхней оценкой на  $\psi(G, k)$  с точностью до константы.

### Литература

- [1] Alon N., Kostochka A.V. Induced subgraphs with distinct sizes // Random Structures & Algorithms. 2009. Vol. 34 (1). P. 45–53.
- [2] Erdős P. Some of my favorite problems in various branches of combinatorics // Annals of Discrete Mathematics. 1992. Vol. 47. P. 231–240.
- [3] Erdős P. Some recent problems and results in graph theory // Discrete Mathematics. 1997. 164. P. 81–85.

### Сведения об авторах

**Ю. Н. Яровиков**, аспирант МФТИ, yu-rovikov@yandex.ru.

**М. Е. Жуковский**, доктор физико-математических наук, доцент, zhukmax@gmail.com.

# **Графы, игры и модели**

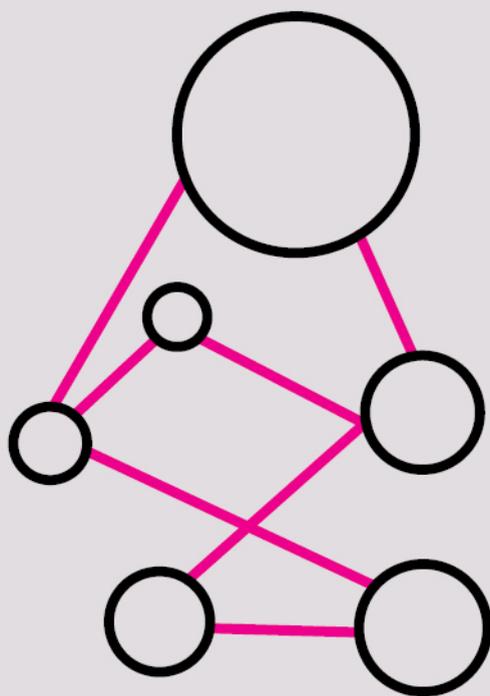
Материалы  
международной научной конференции

---

Подписано в печать 26.12.2022. Бумага офсетная.  
Формат бумаги 60x84/8.  
Печ.л. 10,75. Тир. 300. Заказ 058.

Отпечатано на участке оперативной полиграфии с готового оригинал-макета  
Адыгейского государственного университета.  
385000, г. Майкоп, ул. Первомайская, 208.





Настоящее издание включает материалы Международной научной конференции «Графы, игры и модели». Конференция проходила с 12 по 15 октября 2022 года в г. Майкопе в Адыгейском государственном университете.

К участию в конференции были приглашены отечественные и зарубежные ученые, аспиранты, магистранты и студенты. Тезисы докладов публикуются в том виде, в каком они были представлены авторами.



---

© Адыгейский  
государственный  
университет,  
2022